

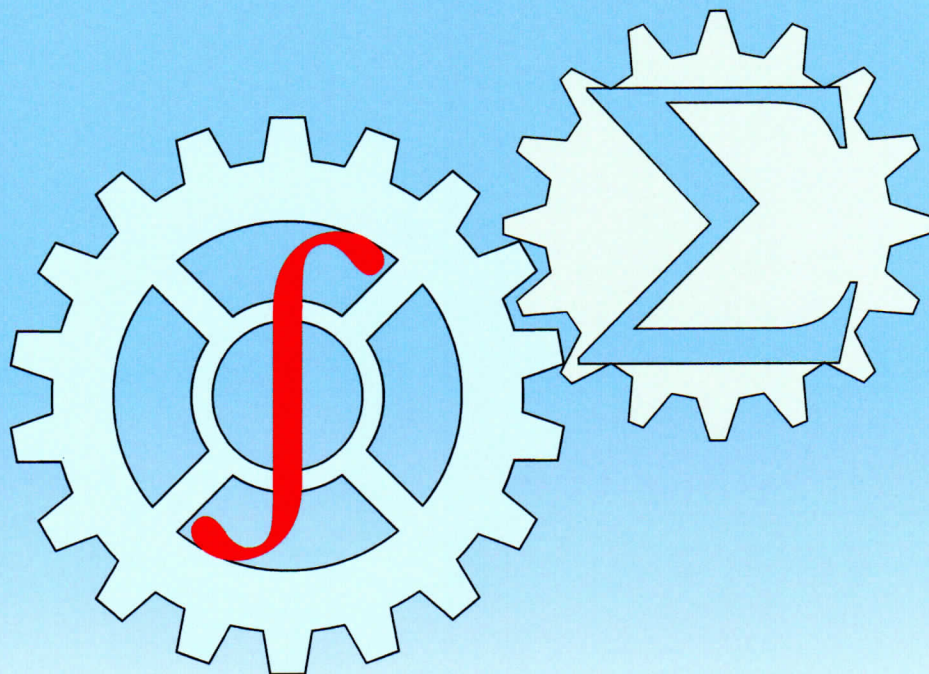


Институт механики и сейсмостойкости сооружений
Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti



ISSN: 2010-7250
Published from 1992

МЕХАНИКА МУАММОЛАРИ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ PROBLEMS OF MECHANICS



2025
Volume 34
No: 2

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON
JURNALI

2

2025

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Заместитель главного редактора – докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ
Заместитель главного редактора – PhD Н.А. НИШОНОВ
Ответственный секретарь – PhD М.М. ХАМДАМОВ

Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Мирсаидов М. д.т.н., проф., акад. АН РУз (Ташкент)
Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Азимов Д. д.т.н., проф. (США)	Панахов Г.М. д.т.н., проф., член.-корр. НАНА (Баку)
Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва)	Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский)
Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент)	Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент)
Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент)
Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Сирожиiddинов З. д.т.н., проф. (Самарканд)
Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США)	Старовойтов Э.И. д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь)
Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург)	Тохилов Ш.М. к.ф.-м.н. (США)
Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)	Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент)
Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург)	Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган)
Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент)	Худайкулиев Р.Р. к.т.н. (Ташкент)
Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва)	Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент)
Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва)	Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)
Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент)	Хусанов Б.Э. д.т.н. (Ташкент)
Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., акад. НАН КР (Ош)	Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь)
Мардонов Б.М. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Эргашов М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Матвеев В.П. д.т.н., проф., акад. РАН (Пермь)	Ювмитов А.С. д.т.н., с.н.с. (Ташкент)

Адрес редакции:

*100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 40.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз*

Телефон: +99855 520-02-45

+99855 520-04-46

E-mail: instmechofficial@gmail.com

Технический редактор: Михайлова В.В.

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 27.06.2025

Сдано в набор 20.06.2025. Подписано в печать 30.06.2025.

Формат 60×84 ¹/₈. Гарнитура Times New Roman. Ризография.

Усл.- печ. л. 6.5. Уч.-изд. л. 6.82. Тираж 130.

Цена договорная.

Отпечатано в типографии ООО “Munis design group”:

100170, г. Ташкент, ул. Буз-2, презд, дом 17-А.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОЭТАЖНОГО ЗДАНИЯ НА ОСНОВЕ КОНТИНУАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЧАТОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ

Усаров М.К., Усанов Ф.А., Курбанбаев М.Ш.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук Республики
Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: umakhamatali@mail.ru*

Аннотация. В статье приведено численное решение динамической задачи поперечных колебаний многоэтажного здания в рамках пространственной континуальной пластинчатой модели, разработанной с использованием бимоментной теории толстых пластин. Приводятся основные уравнения поперечных колебаний, граничные условия на боковых и верхних гранях здания. Получены численные результаты расчетов перемещений и напряжений при поперечных колебаниях многоэтажных зданий для различных вариантов геометрических размеров.

Ключевые слова: сейсмическая нагрузка, перемещения, ускорение, внутренние силы, моменты, бимоменты, напряженно-деформированное состояние, уравнение движения, граничные условия, контактные условия, численный метод.

Введение. Расчет зданий и сооружений с пространственным фундаментом на прочность является одной из актуальных и сложных задач. Сегодня многие ученые и исследователи занимаются совершенствованием существующих методов расчета высотных зданий на сейсмическую прочность, а также разработкой новых пространственных методов.

В работе [1] изложены теоретические основы определения внутренних усилий и построения эпюр различных силовых факторов, определение положения опасных сечений и выбора сечений по условиям прочности.

В статье [2] предлагается новый приближенный метод, основанный на аналитических формулах, для оценки предельной прочности усиленных панелей путем исследования механизмов разрушения панелей. Сравниваются результаты расчетов, выполненных предложенным методом и методом конечных элементов. Для всех исследованных сценариев разрушения получено очень хорошее согласие.

В [3, 4] рассмотрены динамические характеристики и колебания различных осесимметричных и плоских конструкций с учетом различной геометрии, пространственных факторов и неупругих свойств материалов.

В работах [5, 6] рассмотрен аналитический расчет кирпичной кладки бочкообразного свода, структура материала которого обладает выраженной изменчивостью упругих констант. Приведено математическое решение дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных с двумя переменными для анизотропного ортотропного тела в полярных координатах для создания математических моделей, описывающих изменение модуля упругости материала свода.

В статье [7] рассмотрены основания зданий и сооружений из слабвязкоупругих грунтов и особенности теоретического обоснования их деформаций. Необходимость этого исследования обусловлена несоответствием между теорией фильтрационного уплотнения и полевыми и лабораторными экспериментами.

В работе [8] изучена свободная вибрация нагруженных в осевом направлении балок Тимошенко с множеством трещин с различными граничными условиями, а именно: шарнирно-шарнирные, неподвижно-неподвижные, неподвижно-шарнирные и неподвижно-свободные. В этой статье подробно изучается влияние глубины трещин, количества трещин, положения трещин, осевой нагрузки, деформации сдвига и инерции вращения на динамическое поведение балок с множеством трещин.

В статье [9] исследована собственная частота и режим вибрации многоэтажного офисного здания с наличием фундаментной системы и проведено сравнение систем.

В статье [10] рассмотрен расчет многоэтажного монолитного бетонного здания на землетрясение. Задача решается во временной области прямым динамическим методом.

Прямое интегрирование уравнений движения осуществляется по явной схеме. Этот метод позволяет решить задачу в нелинейной динамической постановке с учетом геометрической и физической нелинейностей.

В статье [11] представлены результаты динамического анализа 11-этажного стального здания, выдерживающего момент, со скользящими шарнирными соединениями в качестве соединений балки и колонны, с учетом влияния факторов самоцентрирования, таких как непрерывность MRF и гравитационных колонн, а также основания колонны и гибкость диафрагмы.

Статьи [12-13] посвящены развитию теории и метода расчета толстых пластин. Дан подробный анализ известных публикаций, посвященных этой проблеме. Разработаны теория и метод оценки напряженно-деформированного состояния толстых пластин без упрощающих гипотез в рамках трехмерной теории упругости. При построении теории учитывались все составляющие деформаций и напряжений, возникающие из-за нелинейности закона распределения перемещений по толщине пластины.

Следует отметить, что колебания многоэтажного здания при сейсмических воздействиях моделируются движением некоторой толстой ортотропной консольной пластины, динамическое поведение которой описывается на основе бимоментной теории пластинчатых сооружений [14].

При решении задачи сейсмических колебаний многоэтажного здания в рамках пластинчатой континуальной модели требуется ее определение, приведенное в [14]. При этом, здание рассматривается как пространственное твердое тело в виде параллелепипеда с плотностью и модулем упругости, которые вычисляются по методике, разработанной с учетом многочисленных отсеков (комнат).

Континуальная модель многоэтажного здания. Для построения континуальной модели многоэтажного здания необходимо найти его приведенные модули упругости и плотности. Приведем формулы определения упругих характеристик континуальной пластинчатой модели многоэтажного здания из работы [14].

Введем коэффициенты приведения ξ_{11} , ξ_{22} , ξ_{33} , ξ_{12} , ξ_{13} , ξ_{23} , ζ_0 , с помощью которых приведены модули упругости, сдвигов и плотности пластинчатой модели многоэтажного здания. Приведенные модули упругости и сдвигов здания определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} E_1^{\text{пр}} &= \zeta_{11} E_0, \quad E_2^{\text{пр}} = \zeta_{22} E_0, \quad E_3^{\text{пр}} = \zeta_{33} E_0, \\ G_{12}^{\text{пр}} &= \zeta_{12} G_0, \quad G_{13}^{\text{пр}} = \zeta_{13} G_0, \quad G_{23}^{\text{пр}} = \zeta_{23} G_0, \end{aligned} \quad (1)$$

а приведенная плотность здания определяется выражением

$$\rho_{\text{пр}} = \zeta_0 \rho_0. \quad (2)$$

Значения коэффициентов приведения ξ_{11} , ξ_{22} , ξ_{33} , ξ_{12} , ξ_{13} , ξ_{23} , ζ_0 , в общем случае, для каждой ячейки (комнаты) определяются в зависимости от размера и материала плит комнат многоэтажного здания.

Запишем новые формулы для определения коэффициентов приведенных модулей упругости дискретной части здания ξ_{11} , ξ_{22} , ξ_{33} , ξ_{12} , ξ_{13} , ξ_{23} , ζ_0 , данные в [14]:

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \alpha_1 \frac{S_{11}}{S_{01}}, \quad \xi_{22} = \alpha_2 \frac{S_{22}}{S_{02}}, \quad \xi_{33} = \alpha_3 \frac{S_{33}}{S_{03}}, \quad \xi_{12} = \alpha_4 \frac{S_{12}}{S_{01}}, \\ \xi_{13} &= \alpha_5 \frac{h_{\text{нр}}}{b_1} \lambda^*, \quad \xi_{23} = \alpha_6 \frac{h_2}{a_1}, \quad \zeta_0 = \alpha_0 \frac{V_1}{V_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

где S_{01} , S_{02} , S_{03} – площади поперечных сечений здания в трех координатных плоскостях одного этажа здания; S_{11} , S_{22} , S_{33} – суммарные площади поперечных сечений плит в координатных плоскостях, образующих один этаж здания; λ^* – коэффициент, характеризующий

пустоты в поперечном сечении плиты перекрытия; V_1 – сумма объемов плит, которые составляют один этаж многоэтажного здания; V_0 – полный внешний объем одного многоэтажного здания.

Надо отметить, что коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ в формулах (3) определяются в зависимости от ячеистой структуры конструкции здания. При определении приведенных модулей упругости и сдвига наружных стен, с учетом оконных проемов, применим методу, приведенную в [14], в виде приближенных формул:

$$E_1^{прив} = E_1 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right), \quad E_2^{прив} = E_2 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right), \quad G_{12}^{прив} = G_{12} \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right), \quad G_{13}^{прив} = G_{13} \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right). \quad (4)$$

Здесь, E_1, E_2, G_{12}, G_{13} – модули упругости и сдвига наружных стен, η, η_0 – постоянные коэффициенты, которые зависят от размера проема рассматриваемой стены.

Значения коэффициентов $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}, \xi_0$ для каждой ячейки (комнаты) здания определяются в виде функций двух пространственных переменных, E_0, G_0 – модули упругости и сдвига самой прочной несущей панели здания.

Формулы (1) – (4) определяют приведенные модули упругости, в качестве ортотропной пластинчатой модели здания.

Согласно этим формулам, приведенные модули упругости меньше модуля упругости панелей примерно в 8–15 раз, а приведенная плотность пластинчатой модели дискретной части здания в 7–12 раз меньше плотности материала панелей. Такое расхождение модулей объясняется наличием большого числа пустот и ячеистой структурой здания.

Для многоэтажных зданий в качестве исходных данных задаются следующие размеры здания. Высота и длина многоэтажного здания принимаются, соответственно, равными $b = nb_1$ и a , где n количество комнат по ширине одного этажа, b_1 – размер одной вертикальной поперечной стены (высота одного этажа многоэтажного здания считается постоянной); h_1 – толщина внешних продольных вертикальных несущих стен; h_2 – толщина внутренних межкомнатных поперечных вертикальных стен; $h_{пер}$ – толщина перекрытия.

Для представления значений модулей упругости и плотности вычислены их значения при следующих размерах многоэтажного здания:

$$h_1 = 0.35 \text{ м}, \quad h_2 = 0.20 \text{ м}, \quad h_{пер} = 0.2 \text{ м}, \quad a_1 = 5 \text{ м}, \quad b_1 = 3 \text{ м}, \quad a = 30.$$

Высота и длина многоэтажного здания принимаются, соответственно, равными $b = nb_1$ и $a = 30 \text{ м}$. Ширина здания H варьируется.

Используя исходные данные, определены значения коэффициентов модулей упругости, показанные в табл. 1 для многоэтажных зданий и вычисленные по формулам (3).

Таблица 1

Коэффициенты определения модулей упругости континуальной модели здания при заданных исходных данных

Толщина	Коэффициенты определения модулей упругости континуальной модели здания						
$H(m)$	ξ_0	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{22}	ξ_{23}	ξ_{33}
15	0.100	0.093	0.060	0.067	0.117	0.04	0.09
18	0.089	0.083	0.050		0.107		
20	0.082	0.078	0.045		0.102		

Предлагаемая пространственная модель здания учитывает все виды компонент деформации и напряжений и, как показано в работе [14], пригодны для пространственного расчета на сейсмостойкость зданий и сооружений.

Постановка задачи. Задача о поперечных колебаниях многоэтажного здания является симметричной асимметричной задачей бимоментной теории пластинчатых сооружений, разработанной в [12–14]. Сейсмические колебания многоэтажного здания в рамках пластинчатой модели рассматриваются в прямоугольной декартовой координатной системе x_1 ,

x_2 и z . Для удобства, начало координат расположено в нижнем левом углу срединной поверхности континуальной пластинчатой модели многоэтажного здания. Направим оси Ox_1 и Ox_2 по длине и высоте, а ось Oz – вдоль ширины многоэтажного здания (пластинчатой модели).

Постановка задачи сейсмостойкости многоэтажных зданий при поперечных колебаниях многоэтажного здания описывается в рамках пластинчатой модели [13]. Следует отметить, что общая система уравнений поперечных колебаний многоэтажного здания состоит из трех уравнений относительно изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил, а также трех уравнений относительно трех уравнений бимоментов, описанных девятью неизвестными кинематическими функциями:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k &= \frac{u_k^{(+)} - u_k^{(-)}}{2}, \quad \tilde{\psi}_k = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h u_k z dz, \quad \tilde{\beta}_k = \frac{1}{2h^4} \int_{-h}^h u_k z^3 dz, \quad (k=1,2), \\ \tilde{W} &= \frac{u_3^{(+)} + u_3^{(-)}}{2}, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3 dz, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{2h^3} \int_{-h}^h u_3 z^2 dz.\end{aligned}\quad (5)$$

При построении уравнения поперечных колебаний многоэтажных зданий в рамках континуальной пластинчатой модели многоэтажного здания в общем виде в рамках трехмерной теории упругости определены точные выражения. Изгибающие и крутящие моменты M_{11} , M_{22} , M_{12} определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}M_{11} &= \frac{H^2}{2} \left(E_{11} H \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12} H \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H} \right), \\ M_{22} &= \frac{H^2}{2} \left(E_{12} H \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22} H \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{23} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H} \right), \quad M_{12} = M_{21} = G_{12} \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_1} \right),\end{aligned}\quad (6)$$

Перерезывающие силы определяются в виде

$$Q_{13} = G_{13} (2\tilde{u}_1 + H \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_1}), \quad Q_{23} = G_{23} (2\tilde{u}_2 + H \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_2}). \quad (7)$$

В уравнениях (6), (7) грузовые члены определяются по формулам:

$$\tilde{q}_k = \frac{q_k^{(+)} + q_k^{(-)}}{2}, \quad (k=1,2), \quad \tilde{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} - q_3^{(-)}}{2}.$$

Уравнения движения в моментах и силах имеют вид:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{13} + H\tilde{q}_1 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\tilde{\psi}}_1, \quad \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{23} + H\tilde{q}_2 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\tilde{\psi}}_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + 2\tilde{q}_3 = \rho H \ddot{\tilde{r}}. \quad (9)$$

Бимоменты P_{11} , P_{22} , P_{12} , порождаемые при изгибе и сдвиге пластины, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{H^2}{2} \left(E_{11} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right), \\
P_{22} &= \frac{H^2}{2} \left(E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{23} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right), \\
P_{12} = P_{21} &= \frac{H^2}{2} G_{12} \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_1} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Приводим основные уравнения поперечных колебаний континуальной пластинчатой модели многоэтажных зданий при сейсмических воздействиях, предложенные в работах [12-14].

Интенсивности поперечных касательных и нормальных бимоментов $\tilde{p}_{13}$, $\tilde{p}_{23}$ и $\tilde{p}_{33}$ определяются следующими выражениями:

$$\tilde{p}_{k3} = G_{k3} \left(\frac{2\tilde{u}_k - 4\tilde{\psi}_k}{H} + \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x_k} \right), \quad (k=1,2), \quad \tilde{p}_{33} = E_{31} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{33} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H}. \tag{11}$$

Уравнения относительно бимоментов при изгибе и поперечном сдвиге получаются в следующем виде:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} - 3\tilde{p}_{13} + H\tilde{q}_1 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\beta}_1, \quad \frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} - 3\tilde{p}_{23} + H\tilde{q}_2 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\beta}_2, \tag{12}$$

$$H \frac{\partial \tilde{p}_{13}}{\partial x_1} + H \frac{\partial \tilde{p}_{23}}{\partial x_2} - 4\tilde{p}_{33} + 2\tilde{q}_3 = H\rho \ddot{\gamma}. \tag{13}$$

Надо отметить, что представленные шесть уравнений поперечных колебаний многоэтажного здания в рамках бимоментной теории пластинчатых сооружений описаны относительно девяти неизвестных обобщенных функций перемещений $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$, $\tilde{r}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{W}$: (6), (7), (12) и (13).

Используя метод разложения перемещений в бесконечный ряд Маклорена, в [13] построены ещё три уравнения поперечных колебаний пластинчатой модели многоэтажного здания относительно обобщенных функций перемещений $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{W}$ точек внешних стен в следующем виде:

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2} (21\tilde{\beta}_1 - 7\tilde{\psi}_1) - \frac{1}{30} H \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}, \tag{14}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2} (21\tilde{\beta}_2 - 7\tilde{\psi}_2) - \frac{1}{30} H \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2},$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{4} (21\tilde{\gamma} - 3\tilde{r}) - \frac{1}{20} H \left(\frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right). \tag{15}$$

При описании граничных условий для уравнений поперечных колебаний зданий (5) - (13), кроме сил, моментов и бимоментов, введем ещё удельные бимоменты $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{22}$, $\tilde{\sigma}_{12}$, $\tilde{\sigma}_{11}^*$, $\tilde{\sigma}_{22}^*$, которые определяются формулами, полученными в [12-14], в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{11} &= \left(E_{11} - \frac{E_{13}}{E_{33}} E_{31} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{12} - \frac{E_{13}}{E_{33}} E_{32} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}, \\
\tilde{\sigma}_{22} &= \left(E_{21} - \frac{E_{23}}{E_{33}} E_{31} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{22} - \frac{E_{23}}{E_{33}} E_{32} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}, \quad \tilde{\sigma}_{12} = G_{12} \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Удельные бимоменты $\tilde{\sigma}_{11}^*$, $\tilde{\sigma}_{22}^*$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{11}^* &= -E_{11} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} - E_{12} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} + E_{13} \frac{60(3\tilde{W} + 4\tilde{r} - 21\tilde{\gamma})}{H}, \\ \tilde{\sigma}_{22}^* &= -E_{12} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} - E_{22} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} + E_{23} \frac{60(3\tilde{W} + 4\tilde{r} - 21\tilde{\gamma})}{H}.\end{aligned}\quad (17)$$

При рассмотрении поперечных колебаний здания максимальные напряжения между продольными и поперечными стенами определяются по формулам:

$$\tilde{\sigma}_{13} = G_{13} \left[\frac{7}{6} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{35(33\tilde{\beta}_1 - 9\tilde{\gamma}_1 - 4\tilde{u}_1)}{6H} \right], \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}_{23} = G_{23} \left[\frac{7}{6} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2} - \frac{35(33\tilde{\beta}_2 - 9\tilde{\gamma}_2 - 4\tilde{u}_2)}{6H} \right],$$

$$\tilde{\sigma}_{33} = \frac{5E_{31}}{6} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{5E_{32}}{6} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{H}{36} \left(E_{31} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} - E_{32} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} \right) - E_{33} \frac{35(9\tilde{\gamma} - 2\tilde{W} - \tilde{r})}{6H}. \quad (19)$$

Далее, определим граничные условия для рассматриваемой задачи о поперечных колебаниях многоэтажных зданий.

На свободных боковых гранях здания имеем условия равенства нулю сил, моментов и бимоментов и силовых факторов:

$$\begin{aligned}m_{11} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0, \quad \sigma_{11}^* = 0, \quad m_{13} = 0, \quad \tilde{p}_{13} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{11} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{12} = 0.\end{aligned}\quad (20)$$

На свободной верхней грани здания имеем следующие условия:

$$\begin{aligned}m_{22} = 0, \quad m_{12} = 0, \quad p_{22} = 0, \quad p_{12} = 0, \quad \sigma_{22}^* = 0, \quad m_{23} = 0, \quad \tilde{p}_{23} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{22} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{12} = 0, \quad \sigma_{23}^* = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Метод решения. Методика и алгоритм численного решения задачи колебаний многоэтажного здания при поперечных колебаниях разработаны на основе метода конечных разностей. Для аппроксимации производных перемещений по пространственным координатам воспользуемся формулами центральных разностных схем.

Для аппроксимации производных от напряжений, сил, моментов и бимоментов используются центральные конечно-разностные схемы на полушагах, которые имеют второй порядок точности. Условия о равенстве нулю силовых факторов многоэтажного здания на свободных краях аппроксимируем в виде равенства нулю среднеарифметического значения перемещений внешних и внутренних точек.

Программа расчета перемещений и силовых факторов многоэтажного здания составлена в алгоритмической среде *Delphi*.

Анализ результатов. Численные расчеты произведены в предположении, что сейсмическое движение грунта происходит в направлении оси OZ (вдоль ширины здания) в виде ускорения основания здания:

$$\ddot{u}_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t), \quad (22)$$

где $a_0 = k_c g$ – максимальное ускорение и $\omega_0 = 2\pi v_0$ – круговая частота грунтового основания, k_c и v_0 – коэффициент балльности землетрясения и собственная частота внешнего воздействия, соответственно.

Отсюда получим перемещения основания здания в виде:

$$u_0(t) = \frac{A_0}{2} (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad (23)$$

Здесь $A_0 = 2k_c g / \omega_0^2$ – амплитуда перемещения основания. В качестве начальных условий принимаем нулевые значения.

Отметим, что коэффициенты сейсмичности для семибалльного, восьмибалльного и девятибалльного землетрясений равны $k_c = 0.1, 0.2, 0.4$, соответственно.

Считаем, что внешние стены состоят из железобетона с модулем упругости $E_0 = 30000$ МПа, плотностью $\rho_0 = 2500$ кг/м³, коэффициентом Пуассона $\nu_0 = 0.3$. Внутренние стены считаем состоящими из керамзитобетона со следующими физическими характеристиками: модуль упругости $E = 7500$ МПа, плотность $\rho = 1200$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Приведены результаты расчетов вынужденных колебаний здания в рамках модели пластинчатого сооружения при следующих размерах плит здания:

$$h_1 = 0.30 \text{ м}, h_2 = 0.20 \text{ м}, h_{\text{пер}} = 0.2 \text{ м}, a_1 = 5 \text{ м}, b_1 = 3 \text{ м}.$$

Высота и длина многоэтажного здания принимаются, соответственно равными $b = nb_1$ и $a = 30$ м, а ширина здания H варьируется.

Используя исходные данные, определены значения приведенных модулей упругости, сдвига и плотности, представленные в таблице 1, для многоэтажных зданий, вычисленные по формулам, приведенным в [12-14]. При поперечных колебаниях поля распределения перемещений $\tilde{u}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{W}, \tilde{r}, \tilde{\gamma}$, возникающие под действием сейсмической нагрузки, являются симметричными. Аналогично, напряжения $\tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{22}$, моменты M_{11}, M_{22} и бимоменты $P_{11}, P_{22}, \tilde{p}_{33}, \tilde{\tau}_{33}$ являются симметричными, что свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Приведем численные результаты, полученные с использованием разработанной методики и алгоритма расчета многоэтажных зданий при продольных сейсмических воздействиях. Отметим, что максимальные значения напряжений определены во внешних стенах крупнопанельного многоэтажного здания. Амплитуда внешнего воздействия A_0 зависит от балльности землетрясения, которая определяется из условия $A_0 \omega_0^2 = k_c g$, где k_c, g – коэффициент сейсмичности и ускорение свободного падения. Тогда амплитуда внешнего воздействия получится равной $A_0 = k_c g / \omega_0^2$.

В табл. 2 приведены максимальные значения нормальных напряжений σ_{22} , в измерениях МПа, полученные в зоне контакта вертикальных стен 20-, 24- и 28-этажных зданий при поперечных колебаниях при сейсмическом воздействии с интенсивностью семь баллов.

Таблица 2

Максимальные значения нормального напряжения σ_{22} , в МПа, для высотных зданий шириной $H=18$ м при поперечных колебаниях в зависимости от частоты семибалльного внешнего воздействия

$H, \text{ м}$	$\nu_0, \text{ Гц}$	Для 20-этажного здания	Для 24-этажного здания	Для 28-этажного здания
18	2.6	5.339	5.589	7.615
	2.8	4.941	5.489	8.948
	3.0	4.859	5.091	9.882
	3.2	4.744	6.233	13.80
	3.4	5.059	6.179	14.49

Расчеты выполнены для пяти значений частоты внешнего воздействия: $\nu_0 = 2.6; 2.8; 3.0; 3.2; 3.4$ Гц, которые соответствуют сейсмическим воздействиям при землетрясениях на территории нашей республики.

Максимальное значение нормального напряжения σ_{22} в нижней части внешней стены 20-этажного здания в диапазоне частот от 2.6 до 3.4 Гц при семибалльных

сейсмических воздействиях принимает небольшие значения в пределах от $\sigma_{22} = 4.7$ МПа до $\sigma_{22} = 5.3$ МПа (Табл. 2).

Максимальное значение нормального напряжения σ_{22} в нижней части внешней стены 24-этажного здания в диапазоне частот от 2.6 до 3.4 Гц при семибалльных сейсмических воздействиях также принимает небольшие значения в пределах от $\sigma_{22} = 5.6$ МПа до $\sigma_{22} = 6.2$ МПа. Как видно, при семибалльном сейсмическом воздействии с частотой внешнего воздействия $\nu_0 = 3.4$ Гц, значение максимального напряжения значительно и составляет $\sigma_{22} = 6.2$ МПа (Табл. 2).

Максимальное значение нормального напряжения σ_{22} в нижней части внешней стены 28-этажного здания в диапазоне частот от 2.6 до 3.4 Гц при семибалльных сейсмических воздействиях принимает небольшие значения в пределах от $\sigma_{22} = 7.6$ МПа до $\sigma_{22} = 15$ МПа (Табл. 2). Как видим, во внешних несущих стенах 28-этажного здания, при значении частоты внешнего воздействия $\nu_0 = 3.0-3.4$ Гц значение максимального напряжения значительно больше и может достигать $\sigma_{22} = 15$ МПа.

В табл. 3 представлены результаты расчетов по максимальным значениям горизонтального перемещения $\tilde{r}$, в см, вдоль ширины (малого размера), полученные на верхних уровнях 20-, 24- и 28-этажных зданий шириной $H = 18$ м при поперечных колебаниях при сейсмическом воздействии с интенсивностью семь баллов. Расчеты выполнены для пяти значений частоты внешнего воздействия: $\nu_0 = 2.6; 2.8; 3.0; 3.2; 3.4$ Гц.

Таблица 3

Максимальные значения нормального горизонтального перемещения $\tilde{r}$ (в см) для высотного здания шириной $H=18$ м при поперечных колебаниях.

$H, м$	$\nu_0, Гц$	Для 20-этажного здания	Для 24-этажного здания	Для 28-этажного здания
18	2.6	5.301	5.742	6.653
	2.8	5.066	5.340	7.887
	3.0	5.166	5.563	9.081
	3.2	4.909	5.273	17.62
	3.4	5.088	6.274	30.31

Вычислены максимальные значения нормального горизонтального перемещения $\tilde{r}$ (в см) для 20-этажного высотного здания шириной $H=18$ м при поперечных колебаниях на верхнем уровне 20-го этажа в диапазоне частот от 2.6 до 3.4 Гц при семибалльных сейсмических воздействиях. Горизонтальное перемещение здания принимает небольшие значения в пределах от $\tilde{r} = 4.9$ см до $\tilde{r} = 5.3$ см (Табл. 3).

Найдены максимальные значения горизонтального перемещения $\tilde{r}$ (в см) для 24-этажного высотного здания шириной $H=18$ м при поперечных колебаниях на верхнем уровне 24-го этажа в диапазоне частот от 2.6 до 3.4 Гц при семибалльных сейсмических воздействиях. Горизонтальное перемещение здания принимает небольшие значения в пределах от $\tilde{r} = 4.74$ см до $\tilde{r} = 6.22$ см (Табл. 3).

Выводы и заключение. Таким образом, предложены континуальная модель, метод и алгоритм численного решения задачи сейсмостойкости, а также способы определения перемещений, напряжений и сил при поперечных колебаниях многоэтажного здания. С увеличением высоты этажа значительно увеличиваются нормальные напряжения σ_{22} и горизонтальные перемещения $\tilde{r}$. Анализ численных результатов показал, что напряженно-деформированное состояние многоэтажного здания существенно зависит от значений высоты этажа a_1 и толщины внешних стен. На основе анализа численных результатов установлено, что пластинчатая модель пригодна для описания динамического поведения и расчета напряженно-деформированного состояния многоэтажных зданий при сейсмических воздействиях.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гумбаров А.Д., Кремянский Ф.В., Брусенцов А.С., Ванжа В.В., Дробот В.А. Инженерные расчеты элементов конструкций средств АПК, учеб. пособие. Краснодар: КубГАУ, 2019, 90 с.
- [2] Ozdemir M., Ergin A., Yanagihara D., Tanaka S., Yao T. A new method to estimate ultimate strength of stiffened panels under longitudinal thrust based on analytical formulas // *Mar. Struct.* 2018, Vol. 59, pp. 510–535.
- [3] Belash T.A., Yakovlev A.D. Seismic stability of a tsunami-resistant residential buildings // *Mag. Civ. Eng.* 2018, Vol. 4, No. 80, pp. 95–103.
- [4] Ulybin A.V. Inspection methods of reinforcement parameters of concrete structures // *Mag. Civ. Eng.* 2012, Vol. 27, No. 1, pp. 4–13.
- [5] Fedosov S. V., Malichenko V.G., Toropova M. V. Formation of a software calculation model for restoring building structures after a fire // *Mag. Civ. Eng.* 2021, Vol. 106, No. 6, pp. 20–32.
- [6] Kaldar-Ool A.K., Opbul E. Stress condition of orthotropic vault structure with cylindrical anisotropy // *Mag. Civ. Eng.* 2022, Vol. 116, No. 8, pp. 60–71.
- [7] Maltseva T. V., Trefilina E.R., Saltanova T. V. Deformed state of the bases buildings and structures from weak viscoelastic soils // *Mag. Civ. Eng.* 2020, Vol. 95, No. 3, pp. 119–130.
- [8] Al Rjoub Y., Hamad A. Free vibration of axially loaded multi-cracked Timoshenko beams // *Mag. Civ. Eng.* 2020, Vol. 100, No. 8, Article No. 10002.
- [9] Chik T.N.T., Zakaria M.F., Remali M.A., Yusoff N.A. Vibration Response of Multi Storey Building Using Finite Element Modelling // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2016, Vol. 136, P. 012037.
- [10] Mkrtichev O. V., Dzinchvelashvili G.A., Busalova M.S. Calculation of a Multi-storey Monolithic Concrete Building on the Earthquake in Nonlinear Dynamic Formulation // *Procedia Eng.* 2015, Vol. 111, P. 545–549.
- [11] Ramhormozian S., Clifton G. C., Good T., Jiang S., MacRae G.A. Dynamic Time History Analysis of a Low Damage Multi-Storey Building Incorporating the Seismic Friction Dampers using a Proposed Simplified Multi Degree of Freedom (MDOF) Model: Is Self-centring Really a Concern? // *Pacific Conference on Earthquake Engineering*. Auckland, New Zealand. 2019
- [12] Usarov M.K., Usanov F.A. On solution of the problem of bending and vibrations of thick plates on the basis of the bimoment theory // *AIP Conference Proceedings*. 2022, P. 030016.
- [13] Mirsaidov M., Usarov M. Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates // *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2020, Vol. 614, No. 1, P. 012090.
- [14] Usarov M.K., Usanov F.A., Usarov D.M., Isaev G.U., Toshmatov E.S. Estimation of the stress-strain state of orthotropic plates on elastic foundation using the bimoment theory // *E3S Web Conf.* / ed. Tanaino I., Dzholdosheva T. 2023, Vol. 402. P. 07020.

Дата поступления
17.03.2025

Usarov M.K., Usanov F.A., Kurbanbaev M.Sh., Ko'ndalang tebranishlardagi ko'p qavatli binolarning fazoviy kontinual modellar asosida hisoblash

Аннотация. Ushbu maqolada qalin plastinalarning bimomentli nazariyasi yordamida ishlab chiqilgan fazoviy kontinual plastinasimon modeli doirasida ko'ndalang tebranishlardagi ko'p qavatli binolarning dinamik masalalari keltirilgan. Ko'ndalang tebranishlarning asosiy tenglamalari, binoning yon tomonlari va yuqori yuzlaridagi chegara shartlari berilgan. Ko'ndalang tebranishlardagi ko'p qavatli binolarning geometrik o'lchamlarida ko'chishlar va kuchlanishlarni hisoblashning sonli natijalari olindi.

Калит со'злар: seysmik kuch, ko'chish, tezlanish, ichki kuchlar, momentlar, bimomentlar, kuchlanganlik - deformatsiyalanganlik holati, harakat tenglamalari, chegaraviy shartlar, bog'lanish shartlari, sonli metod.

Usarov M.K., Usanov F.A., Kurbanbayev M.Sh. Transverse vibrations of a multistory building based on a continuum plate spatial model

Abstract. The article presents a numerical solution to the dynamic problem of transverse vibrations of a multi-story building within the framework of a spatial continuous plate model developed using the bimoment theory of thick plates. The main equations of transverse vibrations, boundary conditions on the lateral and upper faces of the building, are given. Numerical results of calculating displacements and stresses under transverse vibrations of multi-story buildings for various options of geometric dimensions are obtained.

Keywords: seismic load, displacements, acceleration, internal forces, moments, bimoments, stress-strain state, equation of motion, boundary conditions, contact conditions, numerical method.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ-ЭЙРИ

¹Салимова А.И., ²Паровик Р.И.

¹Национальный университет Узбекистана имени Мирзо-Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан

²Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,

Камчатский край, Россия

E-mail: parovik@ikir.ru

Аннотация. В работе исследуются амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. С помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точно-сти предложен алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик. Алгоритм расчета и визуализация результатов были реализованы на языке Python. Показано, что при изменении значений параметров - порядков дробных производных, происходит смещение резонансной частоты, что указывает на их связь с добротностью рассматриваемой колебательной системы.

Ключевые слова: дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйри, производные дробных порядков Герасимова-Капуто, нелокальная явная конечно-разностная схема, резонансные кривые.

Введение. Математическое моделирование колебательных процессов и систем (осцилляторов) имеет важное практическое значение и применяется практически во всех областях знаний. Осцилляторы можно классифицировать по различным критериям, например, по источнику энергии, по типу колебаний, по степени свободы, по сложности системы и т.д. [1, 2]. Например, по источнику энергии, одним из известных осцилляторов является нелинейный осциллятор Ван дер Поля в силу того, что здесь колебания поддерживаются за счет внутреннего источника энергии [3].

Математическое описание осциллятора Ван дер Поля для вынужденных колебаний дается следующим образом:

$$\ddot{x}(t) + \lambda(ax^2(t) + b)\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in C^2[0, T]$ – функция смещения; $t \in [0, T]$ – время; $T > 0$ – время моделирования; a, b – заданные положительные константы, ω_0 – частота собственных колебаний, λ – коэффициент трения; δ и φ – амплитуда и частота внешнего воздействия; x_0 и y_0 – заданные константы, определяющие начальные условия; $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$.

Укажем некоторые особенности осциллятора Ван дер Поля (1). Наличие нелинейного трения приводит к релаксационным колебаниям или автоколебаниям, которые на фазовой плоскости соответствуют предельным циклам. Осциллятор Ван дер Поля также относится к классу осцилляторов Льенара, для которых на фазовой плоскости существует единственный устойчивый предельный цикл [4]. Поэтому осциллятор Ван дер Поля применяется для описания электрической активности сердца [5], экономических циклов и кризисов [6]; в радиофизике и электронике осциллятор Ван дер Поля используется для создания стабильных и управляемых сигналов (генератор сигналов) [7], для описания механических систем [8].

Определенный интерес представляет линейный осциллятор Эйри с переменной собственной частотой [9]. Осциллятор Эйри для вынужденных колебаний с трением имеет вид:

$$\ddot{x}(t) + \lambda \dot{x}(t) + c t x(t) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (2)$$

где c – заданная положительная константа.

Осциллятор Эйри обладает следующим свойством – при положительных достаточно больших значениях $t \rightarrow \infty$ наблюдаются колебания с медленно возрастающей амплитудой.

Осциллятор Эйри применяется в оптике, например, вблизи монохроматических каустик наблюдаются интерференционные полосы, интенсивность, которых описывается функциями Эйри [10], в лазерной оптике известны также пучки Эйри [11].

Комбинация осцилляторов (1) и (2) дает осциллятор

$$\ddot{x}(t) + \lambda(ax^2(t) + b)\dot{x}(t) + ctx(t) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (3)$$

который мы будем называть осциллятором Ван дер Поля-Эйри.

Как видно из структуры модельного уравнения (3), осциллятор должен содержать свойства как осциллятора Ван дер Поля, так и осциллятора Эйри. Исследование свободных колебаний ($\delta=0$) осциллятора (3) было проведено в статьях авторов [12, 13]. Показано наличие устойчивого предельного цикла, с помощью численной схемы построены осциллограммы и фазовые траектории.

В статьях [12, 13] также был исследован осциллятор Ван дер Поля-Эйри с памятью или наследственностью (эредитарностью). Эффект памяти в колебательной системе означает, что система «помнит» о своих предыдущих состояниях, например, вследствие оказанного на него воздействия. Такие колебательные системы изучаются в рамках наследственной механики для описания процессов в вязкоупругих и пластичных средах [14]. Наследственный или эредитарный по терминологии В. Вольтерра [15], осциллятор Ван дер Поля-Эйри можно записать так:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau + \lambda(ax^2(t) + b)\int_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + ctx(t) = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (4)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ – разностные ядра, которые являются функциями памяти. Они характеризуют тип памяти и определяются исходя из свойств среды или экспериментальных данных при решении соответствующих обратных задач.

Если выбрать функции памяти степенными, например,

$$K_1(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\theta^{2-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}, K_2(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\beta}}{\theta^{1-\beta}\Gamma(1-\beta)}, \quad (5)$$

где θ – параметр, имеющий размерность времени (характерный масштаб) и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, то мы приходим к дробному исчислению [16, 17].

С учетом (5) осциллятор Ван дер Поля-Эйри (4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\theta^{2-\alpha}}\partial_{0t}^\alpha x(t) + \frac{\lambda(ax^2(t) + b)}{\theta^{1-\beta}}\partial_{0t}^\beta x(t) + ctx(t) = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0, \quad (6)$$

где производные дробных порядков $1 < \alpha < 2$ и $0 < \beta < 1$ понимаются в смысле Герасимова-Капуто [18, 19]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau (t-\tau)^{\alpha-1}, \partial_{0t}^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau (t-\tau)^\beta.$$

В работах [12, 13] был исследован осциллятор Ван дер Поля-Эйри (6) в частном случае при $\theta=c=1$.

В дальнейшем для простоты мы будем называть осцилляторы, которые описываются в рамках дробного исчисления, дробными осцилляторами, а в противном случае, будем называть классическими [20-21]. Дробные осцилляторы изучаются в рамках дробной (наследственной) динамики [22].

В настоящей работе исследуется амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) вынужденных колебаний дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри в зависимости от различных значений порядков дробных производных и характерного масштаба. С помощью численного алгоритма строятся резонансные кривые и показывается их связь с добротностью колебательной системы.

Вынужденные колебания дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Рассмотрим вынужденные колебания дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри

$$\frac{1}{\theta^{2-\alpha}} \partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \frac{\lambda(ax^2(t)+b)}{\theta^{1-\beta}} \partial_{0t}^{\beta} x(t) + ctx(t) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, y(0) = y_0. \quad (7)$$

Если в уравнении (7) принять $c=\theta=1$, $\delta=0$, то мы приходим к результатам, полученным в статьях авторов [12, 13]. В случае, когда $\alpha=2$, $\beta=1$, мы приходим к классическому осциллятору Ван дер Поля-Эйри (3). В случае, когда $\lambda=0$ (5), мы приходим к дробному осциллятору Эйри, который был изучен в статье [23].

Инструментом исследования дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри (7) является следующая нелокальная явная конечно-разностная схема первого порядка точности [24]:

$$\begin{cases} x_0 = c_1, \\ x_1 = c_1 + \tau c_2, y_0 = c_2, \\ x_{k+1} = \frac{2A + \lambda(ax_k^2 - b)B - \tau k}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} x_k - \frac{A}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} x_{k-1} - \\ - \frac{A \sum_{j=1}^{k-1} \omega_j^{\alpha} (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1})}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} - \frac{\lambda(ax_k^2 - b)B \sum_{j=1}^{k-1} \omega_j^{\beta} (x_{k-j+1} - x_{k-j})}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B} + \frac{\delta \cos(k\tau\varphi)}{A + \lambda(ax_k^2 - b)B}, k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\theta^{2-\alpha} \Gamma(3-\alpha)}, B = \frac{\tau^{-\beta}}{\theta^{1-\beta} \Gamma(2-\beta)}, \omega_j^{\alpha} = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \omega_j^{\beta} = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Схема (8) является условно устойчивой, но мы всегда можем ее контролировать с помощью увеличения узлов расчетной сетки N или уменьшения шага дискретизации τ .

Алгоритм расчета АЧХ. АЧХ или резонансные кривые позволяют исследовать установившуюся амплитуду внешнего воздействия в зависимости от ее частоты. Часто АЧХ используют при изучении резонансных эффектов – роста амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты и частоты внешнего воздействия, поэтому их графики называют резонансными кривыми. Если на резонансных кривых присутствуют ярко выраженные пики, то мы можем с уверенностью сказать о наличии резонансов в рассматриваемой колебательной системе.

В работах [25-28] был применен метод гармонического баланса для дробных осцилляторов. Результатом работы этого метода является сведение дробного осциллятора к классическому, но с коэффициентами, которые зависят от порядков дробных производных. Далее для классического осциллятора известны точные формулы амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик, а также добротности, по которым строятся расчетные кривые.

Модельное уравнение дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри (7) содержит частоту собственных колебаний как функцию от времени и поэтому применение метода гармонического баланса здесь затруднительно.

В настоящей статье мы предлагаем численный алгоритм для расчета АЧХ, основанный на нелокальной явной конечно-разностной схеме (8).

Согласно алгоритму:

1) производится расчет смещения $x(t)$ при фиксированном начальном значении частоты внешнего воздействия φ по схеме (8);

2) при достаточно большом индексе расчетной сетки k , при котором выполнено условие $|R_k - R_{k-1}| < \varepsilon$, ε – положительная малая величина, фиксируется значение установившейся амплитуды как $R_k = \max_k(|x_k|)$, которую далее нормируем на амплитуду внешнего воздействия δ .

3) изменяем значение частоты внешнего воздействия φ с некоторым шагом h и повторяем шаги 1) и 2) алгоритма.

В итоге мы получаем два набора значений нормированной установившейся амплитуды и частоты внешнего воздействия, по которым строится график резонансных кривых.

Предложенный численный алгоритм расчета АЧХ был реализован на языке программирования Python в среде PyCharm 2024.1 [29] с использованием библиотеки joblib, которая позволяет проводить распараллеливания на центральных процессорах CPU, а также проводить визуализацию результатов.

Результаты исследований. Рассмотрим примеры, целью которых будет изучение влияния значений порядков дробных производных α и β , характерного масштаба θ в модельном уравнении дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри (7) на АЧХ.

Пример 1. (Влияние параметра θ на АЧХ). Значения параметров для дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри (7): $t \in [0, 800]$ с шагом дискретизации $\tau = 0.008$ для нелокальной явной конечно-разностной схемы (8), $\varphi \in [0, 3]$ с шагом $h = 0.01$, $a = b = 1$, $c = 0.001$, $\lambda = 0.15$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.3$, $\delta = 1.5$. Значения этих параметров мы будем использовать в дальнейшем в других примерах. Параметр $\theta > 0$. Далее мы рассмотрим, как изменяются резонансные кривые при его изменении при значениях $\alpha = \{2, 1.8, 1.6\}$ и $\beta = 1$ (рис.1).

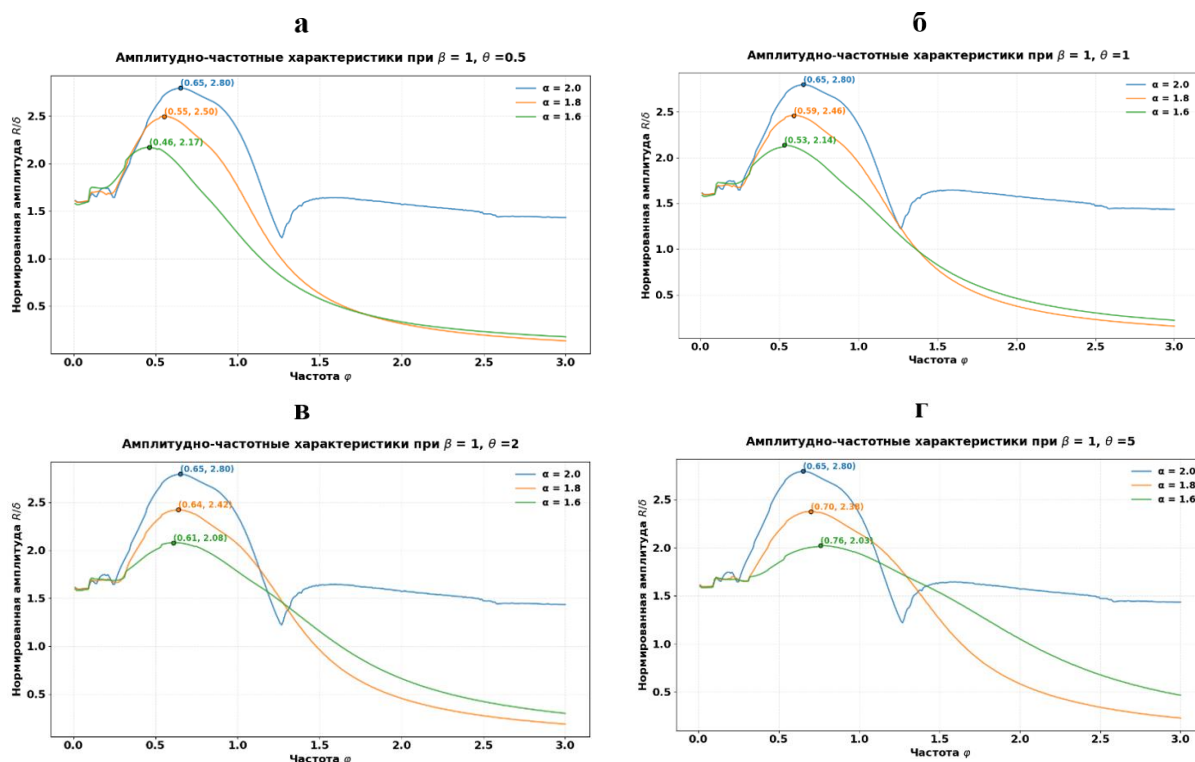


Рис. 1. АЧХ при различных значениях θ . Точками отмечены максимальные значения амплитуд и соответствующих им резонансных частот.

Исходя из рис.2, можно сделать вывод о том, что в диапазоне изменения параметра $0 < \theta \leq 1$ при $\theta \rightarrow 0$, резонансные частоты смещаются в область низших частот, а соответствующие им максимальные значения установившейся амплитуды уменьшаются (рис.1а,в). В то же время, при $\theta > 1$ (рис.1б,г) происходит смещение резонансных частот в область высших частот и увеличение максимальных значений установившейся амплитуды.

Пример 2. (Влияние параметра β на АЧХ). Выберем $\theta = 1$, а $\beta = \{1, 0.8, 0.6, 0.4\}$.

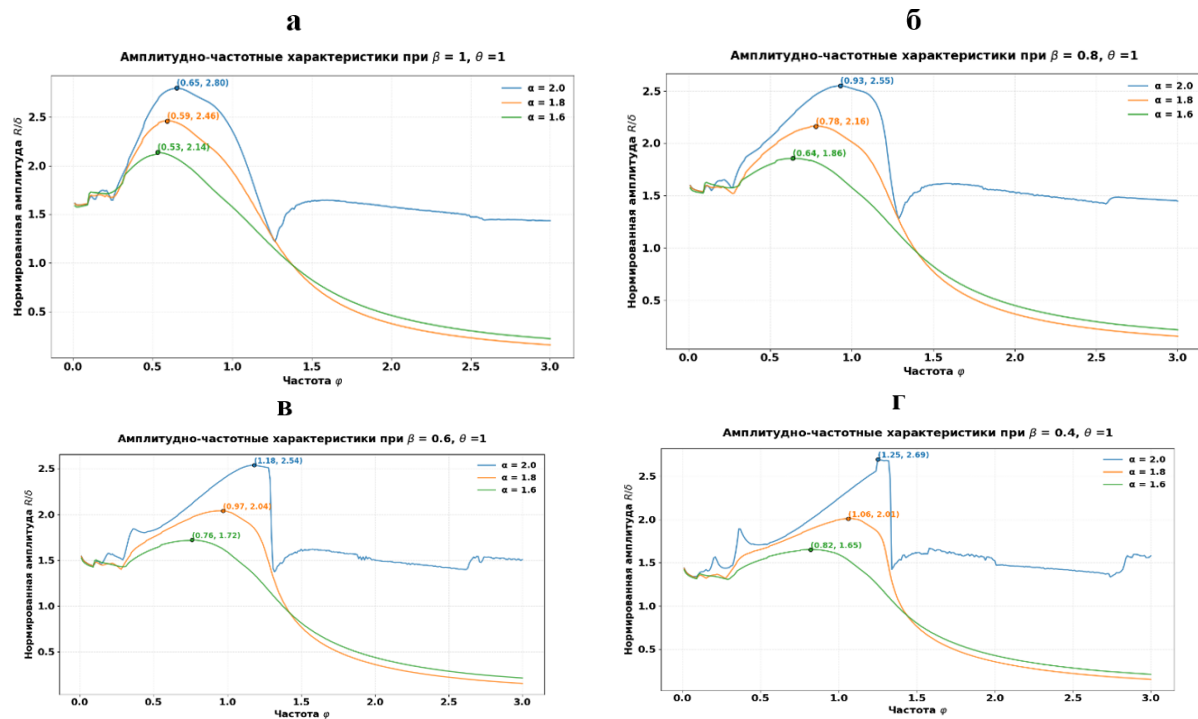


Рис. 2. АЧХ при различных значениях β . Точками отмечены максимальные значения амплитуд и соответствующих им резонансных частот.

На рис.2 приведены АЧХ при различных значениях α и фиксированном значении β . Видно, что при $\alpha \rightarrow 1$, резонансная частота, которая соответствует максимуму установившейся амплитуды, смещается в область низших частот. Также заметим, что при изменении значений β , эта тенденция сохраняется. Кроме того, на рис.3а,б,в,г можно увидеть эволюцию АЧХ, согласно которой при уменьшении значений β максимальная установившаяся амплитуда растет. Это связано с тем, что параметр β входит в уравнение (1) в слагаемое, которое отвечает за трение. При $\beta=1$ влияние трения максимально, но при $\beta \rightarrow 0$ его влияние ослабевает. Это также прослеживается на АЧХ (рис. 3).

Пример 3. (Влияние параметра α на АЧХ). Выберем $\theta=1$, а $\alpha=\{2, 1.8, 1.6, 1.4\}$.

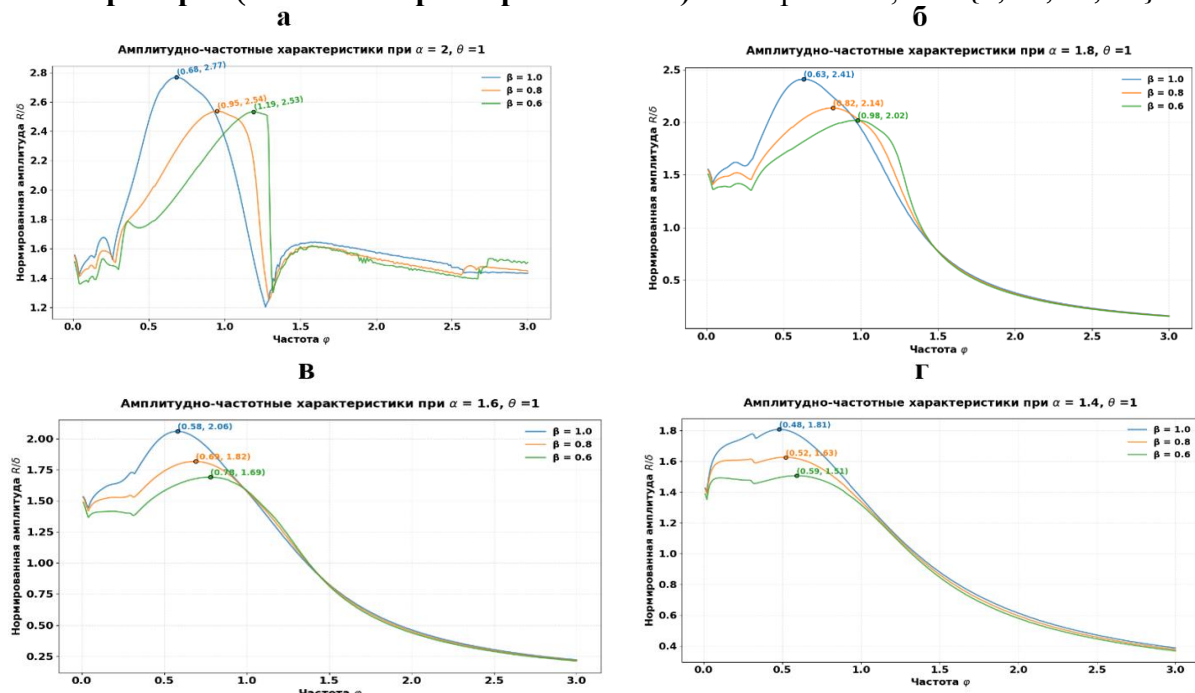


Рис. 3. АЧХ при различных значениях β . Точками отмечены максимальные значения амплитуд и соответствующих им резонансных частот.

Здесь резонансные частоты наоборот смещаются в область повышенных частот. Все вышесказанное указывает на то, что порядки дробных производных α и β , а также характерный масштаб θ связан с энергетической характеристикой колебательной системы – добротностью [25-28].

Заключение. В настоящей работе были исследованы АЧХ дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри. Подтверждено, что порядки дробных производных связаны с добротностью колебательной системы. Изменение значений $\alpha \rightarrow 1$ приводит к усилению диссипации энергии, а изменение значений $\beta \rightarrow 0$, наоборот к ее ослаблению. Последнее определяет механический смысл дробных производных в колебательных системах с памятью. Аналогичную тенденцию мы видим при изменении характерного масштаба в диапазонах $0 < \theta \leq 1$ и $\theta > 1$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959, 919 с.
- [2] Eliseev S. V., Eliseev A. V. *Theory of oscillations*. Springer International Publ., 2020
- [3] Van der Pol B. On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1926. Vol. 2, No. 11, pp. 978-992.
- [4] Liénard A. Etude des oscillations entretenues // Revue Generale de l'Electricite. 1928, Vol. 2, pp. 901-902.
- [5] Виноградова М.С., Канатников А.Н., Ткачева О.С. Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // Математика и математическое моделирование. 2020, №1. стр. 16-32.
- [6] Zhao, J., Zhang, X. Periodic evolution of nonlinear economic cycle systems under exogenous harmonic and stochastic drivers. *Nonlinear Dyn.* 2024, Vol. 112, pp. 19589–19609.
- [7] Зайцев В.В., Карлов А.В. Динамика синхронизации двухкаскадного генератора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021, Т. 24, №3. стр. 56-62.
- [8] El Moussati Y., Hamdi M. Performance enhancement energy harvesting from aeroelastic vibrations using a van der Pol circuit // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024, Vol. 53, No. 3, pp. 2390–2402.
- [9] Airy G. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic // *Trans. Camb. Phil.Soc.*, 1838. No 50, pp. 379–402.
- [10] Vallée O., Soares M. *Airy functions and applications to physics* // World Scientific Publishing Company, 2010.
- [11] Efremidis N. K. et al. Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances // *Optica*. 2019, Vol. 6, No. 5, pp. 686-701.
- [12] Salimova A.I., Parovik R.I. Dynamic modes of the Van der Pol-Airy fractional oscillator // *AIP conference proceedings*. 2024, Vol. 3244, pp. 020006.
- [13] Салимова А.И., Паровик Р.И. Математическая модель дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2024, Т. 47, № 2, стр. 21-34.
- [14] Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 384 с.
- [15] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005, 288 p.
- [16] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003, 272 с.
- [17] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 p.
- [18] Novozhenova O.G. Life and Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in the Soviet Union // *FCAA*. 2017, Vol. 20, pp. 790–809.
- [19] Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // *Meccanica*. 2017, Vol. 52, pp. 3043–3052.
- [20] Паровик Р. И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии. 2017, № 1, стр. 61-68.
- [21] Parovik R. I. Mathematical Model of a Wide Class of Memory Oscillators // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2018, Vol. 11, No. 2, pp. 108-122.
- [22] Klafter J., Lim S.C., Metzler R. *Fractional dynamics: recent advances*. Singapore: World Scientific, 2011, 532 p.
- [23] Паровик Р.И. Математическое моделирование эрмитарного осциллятора Эйри с трением // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017, Т. 10. № 1, стр. 138-148.
- [24] Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014, № 2(9), стр. 30-35.
- [25] Паровик Р.И. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора // Письма в ЖТФ. 2019, Т. 45, № 13, стр. 25-28.
- [26] Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Письма в ЖТФ. 2019, Т. 45, № 1, стр. 34-37.
- [27] Паровик Р.И., Зуннунов Р.Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Проблемы механики. 2019, № 4, стр. 20-23.
- [28] Ким В.А. Вынужденные колебания дробного осциллятора Дуффинга // Проблемы механики. 2021, №3, стр. 20–26.

- [29] Van Horn B. M. II, Nguyen Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool. Birmingham, UK: Packt Publ. Ltd., 2023, 652 p.

Дата поступления
04.04.2025

Salimova A.I., Parovik R.I. Van der Pol-Airy fraktsiyali osilatorining majburiy tebranishlari.

Abstrakt. Maqolada Van der Pol-Airy fraksiyonel osilatorining majburiy tebranishlarining amplituda-chastota xarakteristikalarini o'rganiladi. Birinchi tartibli aniqlikning mahalliy bo'lmagan aniq chekli farq sxemasidan foydalanib, amplituda-chastota xarakteristikalarini hisoblash algoritmi taklif etiladi. Hisoblash algoritmi va natijalarni vizualizatsiya qilish Pythonda amalga oshirildi. Parametrlarning qiymatlarini - kasr hosilalari tartibini o'zgartirganda, rezonans chastotasining siljishi sodir bo'ladi, bu ularning ko'rib chiqilayotgan tebranish tizimining sifat omili bilan bog'liqligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Van der Pol-Airy kasr osilatori, Gerasimov-Kaputo kasr hosilalari, nolokal aniq chekli farq sxemasi, rezonans egri chiziqlari

Salimova A.I., Parovik R.I. Forced oscillations of Van der Pol-Airy fractional oscillator.

Abstract. The paper studies the amplitude-frequency response of forced oscillations of the Van der Pol-Airy fractional oscillator. Using a nonlocal explicit finite-difference scheme of the first-order accuracy, an algorithm for calculating the amplitude-frequency response was proposed. The calculation algorithm and visualization of the results were implemented in Python. It is shown that when changing the values of the parameters - the orders of fractional derivatives, a shift in the resonant frequency occurs, which indicates their relationship with the quality factor of the oscillatory system under consideration.

Keywords: Van der Pol-Airy fractional oscillator, Gerasimov-Caputo fractional derivatives, nonlocal explicit finite-difference scheme, resonance curves.

УДК539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ГАЗОПРОВОДА НАД ОВРАГОМ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ И СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

^{1,2}Мирзаев И., ¹Ан Е.В.

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

²Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: ibrahim.mir@mail.ru, ekaterinaan@mail.ru

Аннотация. Изучена сейсмоустойчивость трубопровода, эксплуатируемого в условиях повреждения опор, когда он находится на одной правой опоре в зоне оврага и когда обе опоры в зоне оврага сломаны. На трубопровод действуют как статические (собственный вес, вес газа, давление и температурный перепад газа), так и динамические (сейсмические) нагрузки. Для решения задачи использованы численные методы – метод конечных элементов, метод конечных разностей и метод последовательных приближений для уточнения величины продольного усилия и его влияния на процесс деформирования трубопровода. Результаты представлены в виде значений вертикальных перемещений и изгибных напряжений трубопровода, позволяющих оценить влияние опор в зоне оврага на устойчивость трубопровода. Определено, что в случае, когда сломаны обе опоры, максимальные значения перемещений и изгибных напряжений (в нижней точке) трубопровода наибольшие и они могут привести к разрушению трубопровода. В случае наличия обеих опор в зоне оврага наблюдается наименьшее значение вертикального перемещения трубопровода, поэтому этот случай является наиболее благоприятным решением при прокладке трубопровода через овраг.

Ключевые слова: трубопровод, овраг, опоры, взаимодействие трубопровода с грунтом, температурный перепад и давление газа, сейсмическое воздействие, устойчивость, МКЭ.

Введение. Трубопроводы являются важной частью инфраструктуры, обеспечивающей транспортировку различных продуктов, включая нефть, газ и воду. Прокладка трубопроводов через географические образования типа оврагов и склонов требует особого внимания к вопросам их надежности. Овраги и склоны представляют собой участки земли с резкими изменениями высоты, из-за чего появляются дополнительные нагрузки на трубопровод. Эти нагрузки могут включать вертикальные и горизонтальные перемещения грунта, а также воздействие внешних факторов, таких как землетрясения. Поэтому изучение устойчивости трубопроводов на эти нагрузки имеет важное значение для обеспечения их безопасности и долговечности.

В статьях [1, 2] показано, что деформация грунта является типичной при экстремальных условиях взаимодействия грунта и сооружения. Проведены крупномасштабные испытания на центрифуге по взаимодействию грунта и трубопровода, моделируя сильные деформации грунта [1]. Также выполнена оценка сопряженных сил вокруг подземного трубопровода, возникающих из-за движения грунта, вызванного землетрясением.

В работе [2] исследовано поведение подземного трубопровода при просадке поверхности грунта. Выявлено влияние параметров трубы и зоны добычи на поведение подземного трубопровода. Получено, что максимальное вертикальное смещение трубопровода находится в середине трубопровода, проходящего в соответствующей зоне добычи полезных ископаемых.

В [3] представлена аналитическая методология расчета внутренних сил и деформаций, возникающих в непрерывных подземных трубопроводах, пересекающих геотехнические проблемные области, подверженные постоянной осадке или подъему поверхности грунта. Эффекты нелинейности материала вводятся в решение с помощью итерационной процедуры, при этом, учитывается влияние удлинения трубопровода на его реакцию. Использование универсального билинейного выражения для описания напряженно-деформированного состояния материала трубопровода делает метод подходящим для стальных, полиэтиленовых и чугунных трубопроводов.

В работах [4 – 6] в рамках теории устойчивости деформируемых систем получены результаты по устойчивости подземных трубопроводов, имеющих различные формы начального искривления, с учетом температурного перепада и внутреннего давления продукта. Этими же авторами предложены методики статического расчета устойчивости трубопроводов применительно к конкретным случаям их прокладки. В [7] рассмотрены проблемы прочности и устойчивости магистральных трубопроводов, проложенных в сложных инженерно-геологических условиях, с учетом их конструктивных особенностей под воздействием эксплуатационных и изменяющихся природно-климатических нагрузок. Предложена методика решения статических задач, согласно которой рассматриваемый трубопровод делится условно на части по грунтовым условиям и по конструкции. Для каждой части составляются соответствующие уравнения равновесия, которые затем интегрируются с учетом условий сопряжения решений на границах частей деления. Проведен расчет основных силовых характеристик подземного трубопровода, результаты представлены в виде эпюр напряжений изгиба и прогибов.

В [8] на примере трубопровода, находящегося на двух опорах в зоне оврага, изучена его сейсмостойкость под воздействием собственного веса, веса транспортируемого продукта, а также давления и перепада температуры газа. Предложен метод решения задач по определению динамической устойчивости трубопровода, используя метод последовательных приближений для уточнения величины продольного усилия. Построены графики изменения перемещений и изгибных напряжений трубопровода при распространяющейся трехкомпонентной сейсмической волне.

Таким образом, в [1-7] не было изучено влияние сейсмической нагрузки на устойчивость трубопровода, проходящего в зоне оврага, а в [8] рассмотрен только случай, когда трубопровод уложен на двух опорах в зоне оврага. В отличие от вышеперечисленных работ, в данной статье изучена сейсмоустойчивость трубопровода, когда последний находится на одной опоре в зоне оврага и второй случай, когда обе опоры в зоне оврага сломаны.

Постановка задачи и численные результаты. Настоящая работа является продолжением проводимых нами исследований. Рассмотрен газопровод длиной 160 м, средняя часть которого пересекает овраг, а две крайние его части расположены в грунте. Взаимодействие трубопровода с окружающим грунтом на крайних участках описывается линейной моделью [8, 9]. Граничные условия на торцах трубопровода в глобальной декартовой системе координат задаются как значения шести перемещений и шести поворотов относительно осей координат на его торцах. Условие на опоре ставится в предположении, что трубопровод установлен на скользящей опоре без ограничений на повороты. А в месте контакта с опорой положено, что только поперечное и вертикальное перемещения этого узла задаются как движение грунта.

Полная математическая постановка задачи приведена в работе [8]. Задача решена методом конечных элементов по координате и неявным методом конечных разностей по времени. Для каждого конечного элемента составлены матрицы масс, жесткостей, взаимодействия, продольной силы, общий вид которых приведен в [10–12]. Каждый стержневой

элемент может иметь свои массовые и жесткостные параметры, в том числе параметры грунта.

Продольная ось трубопровода до деформирования прямолинейная. Глубина заложения трубопровода равна 1 м. Остальные исходные параметры следующие: $D_H=1.42$ м; $D_B=1.381$ м; $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $G=7.69 \cdot 10^4$ МПа; $\rho=7.8 \cdot 10^3$ кг/м³; $K_\xi=1.67 \cdot 10^7$ Н/м; $K_\eta=K_\zeta=4.33 \cdot 10^7$ Н/м. Внутреннее избыточное давление в газопроводе 7.5 МПа, температурный перепад 30°C.

Для уточнения величины продольного усилия, возникающего за счет температурного перепада и давления транспортируемого продукта, и его влияния на деформированное состояние трубопровода использован метод последовательных приближений, который связан с большими поворотами и малыми деформациями [13].

На рис. 1 приведены полученные численные результаты прогиба и изгибного напряжения трубопровода, которые качественно совпадают с результатами из работы [7]. В постановке задачи работы [7] была учтена дополнительная вертикальная распределенная внешняя нагрузка по всей длине трубопровода. А также в работе [7] не дана полная информация о характеристиках трубопровода.

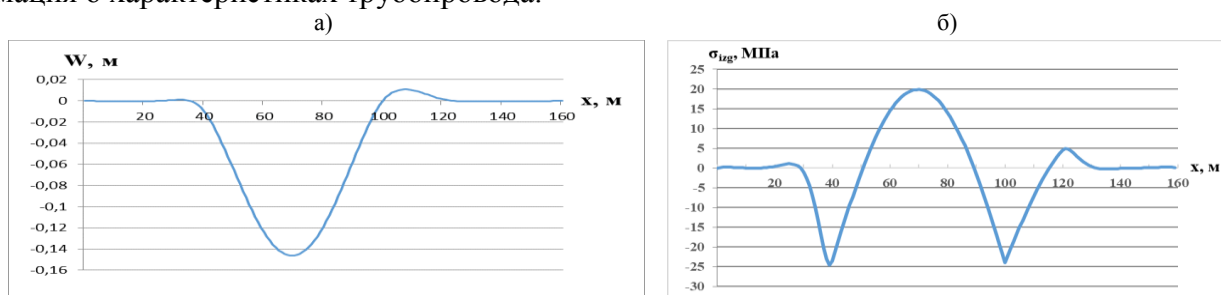


Рис. 1. Значения прогиба (а) и изгибного напряжения (б) вдоль оси трубопровода, когда сломана левая опора в зоне оврага

Из анализа рис.1 видно, что в случае, когда одна опора сломана, картина несимметричная, т.е., наблюдается смещение влево. На границе грунта (в точке 40 м) появляется наибольшее сжимающее изгибное напряжение в нижней точке трубопровода (-25 МПа) из-за того, что грунт подпирает трубопровод и грунт подвергается большей деформации. В середине трубопровода растягивающее изгибное напряжение составляет 15 МПа, а максимальное растягивающее напряжение (20 МПа) смещено влево от середины трубопровода.

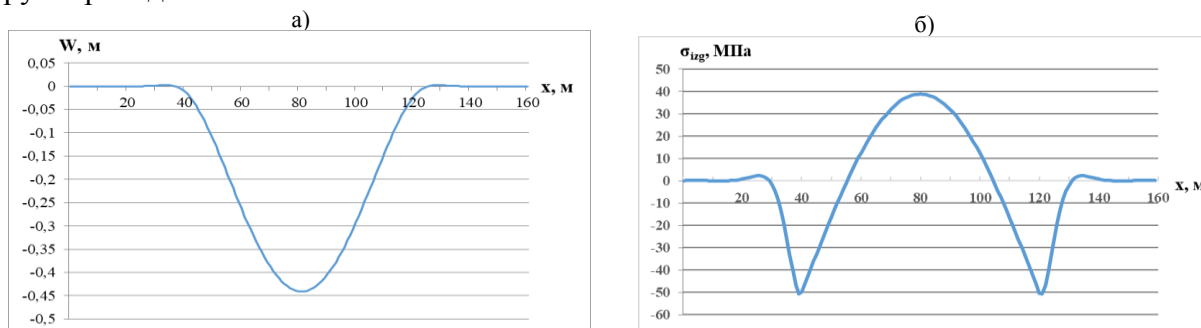


Рис. 2. Графики прогиба (а) и изгибного напряжения (б) вдоль оси трубопровода, когда сломаны обе опоры в зоне оврага

Из анализа рис.2, когда обе опоры сломаны, как и следовало ожидать, наблюдается симметричная картина, наибольшее сжимающее изгибное напряжение составляет -50 МПа в точках 40 м и 120 м, которые соответствуют берегам оврага. В середине трубопровода наибольшее растягивающее изгибное напряжение составляет приблизительно 40 МПа, это значение примерно в два раза превышает значение соответствующего напряжения по сравнению со случаем наличия двух опор [8].

В табл.1 приведены максимальные значения прогибов и изгибных напряжений трубопровода, эксплуатируемого в нестандартных условиях работы: случай 1, когда трубопровод в зоне оврага опирается на две опоры [8]; случай 2 – на одну опору; случай 3 – когда обе опоры сломаны.

Таблица 1

Максимальные значения прогибов и изгибных напряжений трубопровода			
Случай 1 [8]	$u_z = -0.045\text{м}$	$\sigma_{\text{сжим}} = -30\text{МПа}$	$\sigma_{\text{растяг}} = 20\text{МПа}$
Случай 2	$u_z = -0.15\text{м}$	$\sigma_{\text{сжим}} = -25\text{МПа}$	$\sigma_{\text{растяг}} = 20\text{МПа}$
Случай 3	$u_z = -0.44\text{м}$	$\sigma_{\text{сжим}} = -50\text{МПа}$	$\sigma_{\text{растяг}} = 40\text{МПа}$

Для случая 2 максимальное сжимающее напряжение достигается в точке 40 м, а в случае 1 в точке 60 м, где расположена левая опора, а соответственно максимальное растягивающее напряжение составляет 20 МПа, для случая 1 оно достигается в середине трубопровода, а для случая 2 – со сдвигом влево в точке 68 м (рис. 1б).

Анализ численных результатов показал, что максимальный прогиб трубопровода происходит в зоне оврага. По значениям, приведенным в табл.1 видно, что в случае, когда отсутствуют обе опоры, максимальные значения перемещений и изгибных напряжений в трубопроводе наибольшие, по сравнению со случаем при наличии опор. А в случае наличия обеих опор в зоне оврага наблюдается наименьшее значение максимального значения перемещения. Следовательно, наличие опор в овраге допускает минимальную осадку трубопровода.

Далее рассмотрим поведение трубопровода, проходящего через овраг, при действии сейсмической волны. Нагрузка задана в виде трехкомпонентной сейсмограммы землетрясения в Газли в 1976 г. Продолжительность действия землетрясения $t=28$ с; амплитуда колебаний грунта соответствует 9*-балльному землетрясению по шкале MSK-64. При расчете затухание динамических процессов за счет вязкости материалов трубопровода и грунта не учитывалось.

На рис. 3-4 приведены процессы изменения вертикального перемещения и изгибного напряжения трубопровода под воздействием статических сил и сейсмической волны, распространяющейся со скоростью 500 м/с по направлению оси трубопровода.

На рис. 3а показаны вертикальные перемещения вдоль трубопровода в различные моменты времени. Здесь заметно действие распространения волны как в грунте, так и по трубопроводу.

На рис. 3в показаны вертикальные перемещения в зависимости от времени в различных точках трубопровода.

По длине трубопровода происходят сложные процессы распределения значений перемещений и напряжений трубопровода, соответствующие действующей сейсмической волне. Изменение значений сейсмической волны в грунте совпадает с изменением значений вертикальных перемещений в месте закрепления трубопровода с опорой ($x=100$ м) и жестким закреплением концов трубопровода в грунте ($x=0$ м и 160 м), при этом наблюдается сдвиг по времени, связанный с приходом волны. Так как левая опора сломана ($x=60$ м), наблюдается вертикальное смещение трубопровода равное перемещению -0.12м , полученное по результатам решения статической задачи (рис. 3в) и с приходом волны наблюдаются высокочастотные колебания из-за отсутствия опоры.

На рис. 3б показано изгибающее напряжение трубопровода вдоль его оси в разные моменты времени. Видны процессы, происходящие в трубопроводе с течением времени. На рис. 3г показано изгибающее напряжение трубопровода в зависимости от времени в различных точках трубопровода. Наблюдаются высокочастотные колебания, связанные с собственными колебаниями трубопровода из-за отсутствия демпфирующих сил. Анализ напряжения по всем точкам показал, что изгибающее напряжение превышает величину 200 МПа.

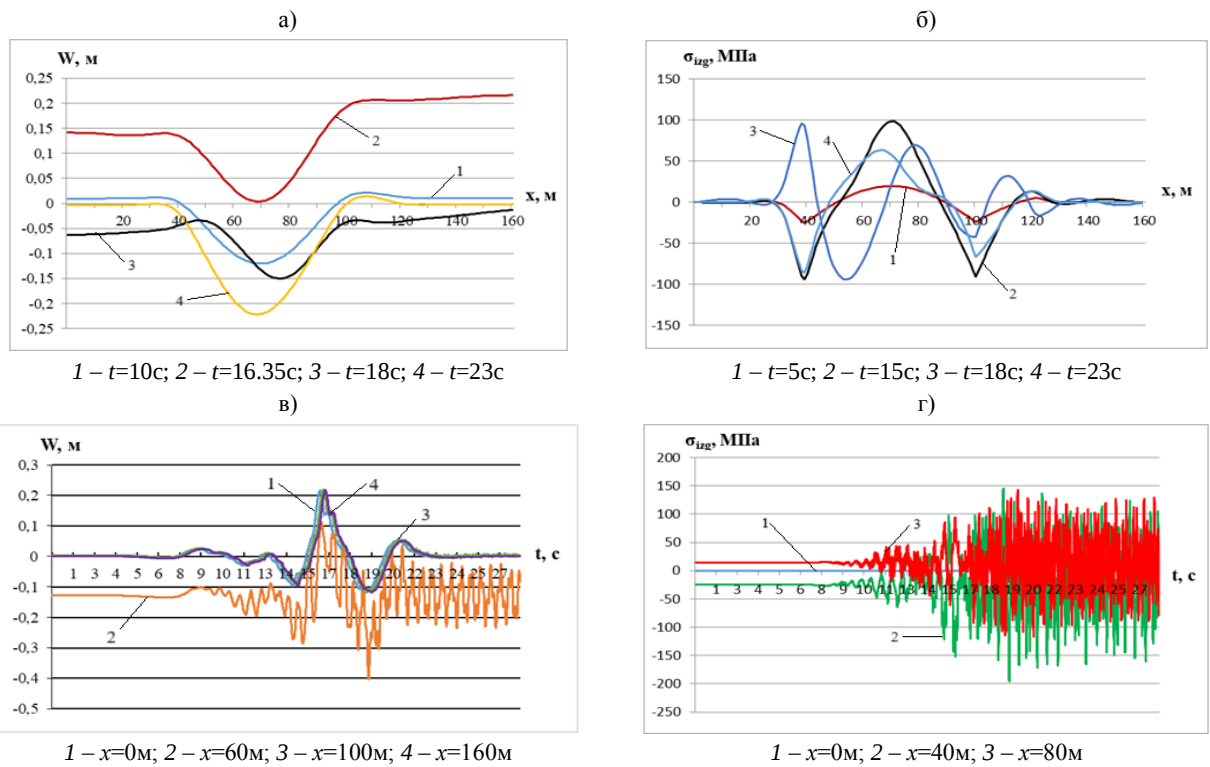


Рис. 3. Изменения значений вертикальных перемещений (а, в) и изгибающих напряжений (б, г) трубопровода, когда сломана левая опора в овраге

На рис. 4 в случае, когда сломаны обе опоры в зоне оврага, наблюдается аналогичная картина, но с большими значениями параметров. Частоты собственных вертикальных колебаний, как и следовало ожидать, сравнительно меньше.

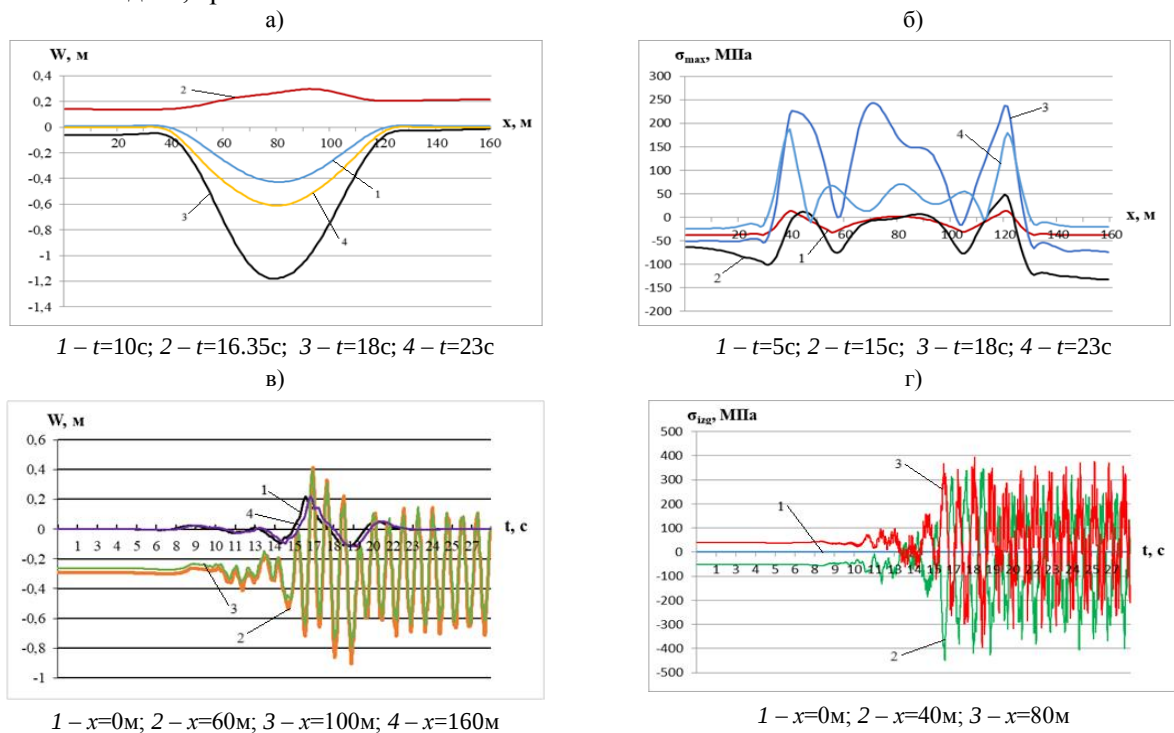


Рис. 4. Изменения значений вертикальных перемещений (а, в) и изгибающих напряжений (б, г) трубопровода, когда сломаны обе опоры в овраге

При расчете по сейсмограмме землетрясения в Газли, интенсивность которого равнялась 9* баллам по шкале MSK-64, получено, что напряжения для случая, когда отсутствуют одна или обе опоры, превышают допустимый предел для стали Ст.3 с пределом

упругости 185 МПа. В этом случае может произойти разрушение трубопровода. Этот эффект связан с тем, что на трубопровод воздействует быстро возрастающая продольная нагрузка, что соответствует исследованиям, проведенным в работе [14], при изучении устойчивости стержня.

Заключение. Получено, что в случае, когда отсутствуют обе опоры, максимальные значения перемещений и напряжений в трубопроводе наибольшие, по сравнению со случаем при наличии опор. А в случае наличия обеих опор в зоне оврага наблюдается наименьшее значение перемещения трубопровода. Выявлено, что наиболее благоприятным решением является случай, когда трубопровод располагается на двух опорах в зоне оврага, так как благодаря опорам в овраге получается минимальная осадка трубопровода.

Показано, что при расчете по сейсмограмме Газли обнаружены сложные процессы распределения значений перемещений и напряжений в трубопроводе, соответствующие действующей сейсмической волне. Наблюдается сдвиг по времени в значениях перемещений, связанный с приходом волны в соответствующие точки трубопровода. При сломанной опоре возникает смещение по вертикали, равное перемещению -0.12м, полученное по результатам решения статической задачи.

Периоды вертикальных колебаний трубопровода при отсутствии одной опоры по сравнению с частотами колебаний при наличии двух опор увеличиваются, а в случае отсутствия двух опор наблюдается наибольший период колебаний.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] O'Rourke T.D., Jung J.K., Argyrou C. Underground pipeline response to earthquake-induced ground deformation // Soil Dyn. Earthq. Eng. 2016, Vol. 91, No. 11, pp. 272–283.
- [2] Xu P., Zhang M., Lin Z., Cao Z., Chang X. Additional Stress on a Buried Pipeline under the Influence of Coal Mining Subsidence // Adv. Civ. Eng. / ed. Bedon C. 2018, Vol. 2018, № 1, Article ID 3245624.
- [3] Kouratzis G.P., Karamitros D.K., Sloan S.W. Analysis of buried pipelines subjected to ground surface settlement and heave // Can. Geotech. J. 2015. Vol. 52, № 8. P. 1058–1071.
- [4] Ясин Э.М., Черников Э.М. Устойчивость подземных трубопроводов. М.: Недра, 1967, 120с.
- [5] Айнбиндер А.Б. Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982, 340 с.
- [6] Бородавкин П.П. Подземные магистральные трубопроводы (проектирование и строительство). М.: Недра, 1982, 384с.
- [7] Шаммазов А.М., Зарипов Р.М., Чичелов В.А., Коробков Г.Е. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Т. 1. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов. М.: Интер, 2005, 705 с.
- [8] Мирзаев И., Ан Е.В. Исследование устойчивости участка трубопровода, проходящего через овраг, на сейсмические воздействия // Узбекский журнал «Проблемы механики». 2024, №4. стр. 73-81.
- [9] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973, 180с.
- [10] Mardonov B., Mirzaev I., Nishonov N., An E., Kosimov E. Study of the uplift of buried pipelines in liquefied soils based on the earthquake record // E3S Web of Conferences "Actual Problems of Decarbonization of Transport and Power Engineering: Ways of Their Innovative Solution". 2024, Vol. 515, No 3, P. 04009.
- [11] Zienkiewicz O.C. The finite element method. New York: McGraw-Hill, 1977.
- [12] Мяченко В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / Под общ.ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989, 520 с.
- [13] Филиппов А.С. Численные методы в механике деформируемого твердого тела. М., 2016, 233 с.
- [14] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М., 1963, 879 с.

Дата поступления
20.04.2025

Mirzaev I., An Ye.V. Statik yuklamalar va seysmik ta'sirdagi jarlikdan o'tkazilgan gaz quvurining ustuvorligi.

Аннотация. Tayanchlari shikastlangan sharoitda jarlik zonasida bitta o'ng tayanchda joylashgan hamda jarlik zonasida ikkala tayanchlar ham singan hollar uchun foydalanishdagi quvurning zilzilaga chidamliligi o'rganildi. Quvurga statik (o'z og'irligi, gazning og'irligi, gazning bosimi va harorat farqi) va dinamik (seysmik) yuklamalar ta'sir qiladi. Masalani yechish uchun sonli usullar - chekli elementlar usuli, chekli ayirmalar usuli va ketma-ket yaqin-lashish usulidan foydalanib, bo'ylama kuchning qiymati va uning deformasiyalanish jarayoniga ta'siri aniqlandi. Natijalar quvurning vertikal siljishlari va egilish kuchlanishlari qiymatlari ko'rinishida keltirilgan bo'lib, jarlik zonasidagi tayanchlarning quvur turg'unligiga ta'sirini baholash imkonini beradi. Ikkala tayanch singanda quvurning ko'chishi va egilish kuchlanishlarining maksimal qiymatlari quvurning buzilishiga olib kelishi mumkinligi aniqlandi. Ikkala tayanch mavjud bo'lgan holatda esa jarlik zonasida quvurning vertikal siljishining eng kichik qiymati kuzatiladi, shuning uchun bu holat quvurni jarlik orqali o'tkazishda eng qulay yechim hisoblanadi.

Калит so'zlar: quvur, jarlik, tayanchlar, quvurning grunt bilan o'zaro ta'siri, harorat farqi va gaz bosimi, seysmik ta'sir, turg'unlik, ChEU.

Mirzaev I., An E.V. Stability of the gas pipeline laid through the ravine under static loads and seismic impact.

Abstract. The seismic stability of the pipeline, which operates under conditions of supporting pier damage, is studied both when it is located on one pier in the ravine zone and when both piers are broken in that area. The pipeline is affected by both static loads (its weight, gas weight, pressure, and temperature difference of the gas) and dynamic loads (seismic). To address this issue, numerical methods are employed, including the finite element method, the finite difference method, and the successive approximation method, to determine the magnitude of the longitudinal force and its impact on the deformation process of the pipeline. The results are presented as values of vertical displacements and bending stresses of the pipeline, allowing for an assessment of how the piers in the ravine zone influence the pipeline's stability. It is found that when both piers are broken, the maximum values of displacements and bending stresses (at the lowest point) of the pipeline are highest, potentially leading to pipeline destruction. Conversely, when both piers are present in the ravine zone, the smallest vertical displacement of the pipeline is observed, making this scenario the most favorable for laying a pipeline through a ravine.

Keywords: pipeline, ravine, piers, interaction of the pipeline with soil, temperature difference and pressure of gas, seismic impact, stability, FEM.

УДК 531:621-752:681

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОДВИЖНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

Ходжабеков М.У., Юлдошева З.С.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет, Самарканд, Узбекистан
E-mail: uzedu@inbox.ru

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы динамики колебаний стержня с гистерезисным типом упругих диссипативных характеристик в сочетании с подвижным динамическим гасителем, обладающим линейными упругими характеристиками. Получены дифференциальные уравнения движения, и на основе условий ортогонализации, сформулированы дифференциальные уравнения движения в ортогональных формах собственных колебаний. С помощью оператора Лапласа дифференциальные уравнения движения приведены к системе алгебраических уравнений. Аналитическое выражение передаточной функции определено в зависимости от параметров системы. На основе метода Ден-Гартога вычислены частоты и получены аналитические выражения для определения оптимальных параметров. Для закреплённых на концах граничных условий определены формы и частоты собственных колебаний, выполнен численный анализ изменения частот в зависимости от отношения массы динамического гасителя к массе стержня, а также сформулированы выводы.

Ключевые слова: частота, формы колебаний, амплитуда, передаточная функция, колебания, стержень, динамический гаситель.

Введение. Основное преимущество подвижных динамических гасителей заключается в их способности адаптироваться к динамическим условиям, обеспечивая эффективное поглощение энергии и управление колебаниями. Они позволяют оптимизировать движение в различных частях системы и обеспечивают большую гибкость для эффективной работы. Другие виды гасителей, такие как пассивные или статические, в некоторых случаях проще и требуют меньше технического обслуживания, но имеют ограничения в управлении и адаптации системы. В связи с этим в данной работе рассматривается использование подвижного динамического гасителя для демпфирования поперечных колебаний стержня.

В настоящее время опубликован ряд работ, посвящённых демпфированию колебаний стержня.

В работе [1] изучена устойчивость колебаний упругого стержня с простыми опорами, несущего подвижную массу, под воздействием гармонического возбуждения. В теоретическом анализе дифференциальное уравнение движения решено с учётом нелинейных членов пятого порядка. Устойчивость стержня проанализирована для полусубгармонического резонанса. Результаты показывают, что некоторые параметры, особенно масса подвижного груза и скорость внешнего возбуждения, оказывают значительное влияние на изменение границы устойчивости. Поэтому эти параметры играют важную роль в устойчивости системы.

Работа [2] связана с проектированием управляющей силы в узловых точках колеблющихся элементов конструкции под воздействием гармонического возбуждения, с целью предотвращения их смещения и наклона. Показано, что нежелательные колебания в заданных точках можно устранить с помощью реакционных сил. Для управляющей силы полу-

чено простое и точное аналитическое выражение в замкнутой форме с использованием динамической функции Грина. Показано, что при определённых условиях эта управляющая сила может быть реализована с помощью пассивных элементов, таких как дугообразные структуры и амортизаторы. Эффективность этого метода демонстрируется на численных примерах для различных случаев.

В статье [3] рассматривается задача подавления колебаний распределённой параметрической системы с помощью динамического гасителя, обладающего гистерезисным типом упругих диссипативных свойств. Сначала получено уравнение, описывающее амплитудно-частотную характеристику системы. Затем определены две частотные области, в которых система имеет несколько решений, и проведён анализ амплитудно-частотной характеристики при различных параметрах системы. Изучено поведение системы при различных внешних воздействиях.

В статье [4] исследовано движение двух идентичных, непараллельных пластин под воздействием постоянно движущегося динамического гасителя. Построены и решены частные дифференциальные уравнения четвёртого порядка с использованием аналитического метода. В первую очередь получено асимптотическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Показано, что метод дифференциального преобразования, являющийся полуаналитическим методом, применим к таким уравнениям для получения колеблющегося ряда решений. Колебательные уравнения, полученные с помощью преобразования Лапласа и метода аппроксимации, были решены в программе *MAPLE*. Влияние скорости движения нагрузки и гибкости упругого слоя на колебания системы с двумя пластинами представлено в графическом виде. Также установлено, что поперечный прогиб каждой пластины увеличивается с ростом скорости движущейся нагрузки в течение заданного временного интервала.

В работе [5] проведён анализ динамики стержня с двумя динамическими гасителями, установленными на его концах, под воздействием одиночной движущейся нагрузки, с использованием расширенного метода суперпозиции для сложных процессов. Сделан вывод, что эффективность динамического гасителя зависит от скорости нагрузки. Показано, что при правильном выборе коэффициентов демпфирования динамического гасителя в определённом диапазоне скоростей можно значительно снизить колебания стержня.

В работе [6] решена задача использования пружинного динамического гасителя для снижения колебаний стержней, подвергнутых воздействию подвижных нагрузок. Для математического моделирования стержня использован метод конечных элементов. Динамический гаситель, с учётом массы его пружины, размещён в середине стержня. Уравнения движения приведены к первой модальной координате. Упрощённая модель позволила определить оптимальные значения жёсткости и коэффициента демпфирования динамического гасителя.

В работе [7] исследована возможность уменьшения резонансных колебаний упругих стержней под воздействием подвижных нагрузок за счёт повышения эффективности пассивных поглотителей энергии. Для соединения основного стержня, несущего нагрузки, с вспомогательным стержнем, использованы линейные динамические гасители. Методология, предложенная на основе таких устройств, обоснована как способ снижения реакции железнодорожных мостов на транзит высокоскоростных поездов.

Анализ отмеченных работ позволяет сделать вывод о том, что изучение динамики поперечных колебаний стержня с гистерезисным типом упругих диссипативных характеристик и движущимся по его длине жёстким телом - динамическим гасителем, является актуальной, но не решённой задачей.

Материалы и методы. Математически моделируется совместное поперечное колебание стержня с упругими диссипативными характеристиками гистерезисного типа и жёсткого тела - динамического гасителя, движущегося вдоль его длины.

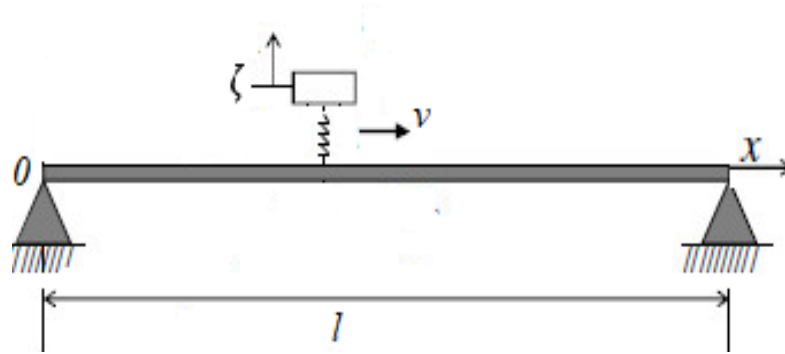


Рис. 1. Схема системы со стержнем и подвижным динамическим гасителем

Если воспользоваться схемой свободного тела для механической системы, представленной на рис. 1, то для совместных поперечных колебаний стержня с упругими диссипативными характеристиками гистерезисного типа и жёсткого тела - динамического гасителя с линейными упругими характеристиками, движущегося вдоль его длины, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - c\zeta\delta(x-vt)H\left(\frac{l}{v}-t\right) &= -\rho A \frac{\partial^2 w_a}{\partial t^2}; \\ m \frac{\partial^2 w(x_0)}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c\zeta &= -m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где M – изгибающий момент; ρ и A – соответственно, плотность материала стержня и площадь его поперечного сечения; $w(x_0)$ – перемещение точки стержня, в которой расположен динамический гаситель; $x_0=vt$ – точка расположения динамического гасителя; v – скорость динамического гасителя; t – время; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $H(l/v)$ – функция Хевисайда; l – длина стержня; c и m – соответственно, жёсткость и масса динамического гасителя; ζ – относительная деформация динамического гасителя; w_a – абсолютное перемещение стержня

$$w_a = w_0 + w, \quad (2)$$

w_0 – перемещение основания; w – прогиб стержня.

Используем следующее соотношение между напряжением и относительной деформацией в материале стержня [8]:

$$\sigma = E(1 + (-\eta_1 + j\eta_2)[C_0 + f(\zeta_0)])\zeta_0, \quad (3)$$

где E – модуль упругости; $\eta_1, \eta_2 = \eta_{22}\text{sign}(\omega)$ – постоянные коэффициенты, зависящие от упруго-диссипативных свойств материала стержня и определяемые по гистерезисной петле; $j^2=-1$; $f(\zeta_0)$ – декремент колебаний, являющийся функцией абсолютного значения относительной деформации ζ_0

$$f(\zeta_0) = C_1\zeta_0 + C_2\zeta_0^2 + \dots + C_n\zeta_0^n, \quad (4)$$

$C_0, C_1, \dots, C_n$ – параметры гистерезисного узла, определяемые экспериментально и зависящие от демпфирующих свойств материала стержня [8].

Относительная деформация ζ_0 вычисляется следующим образом [9]:

$$\zeta_0 = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} z, \quad (5)$$

Выражение для изгибающего момента записывается следующим образом [9]:

$$M = \int_A \sigma z dA. \quad (6)$$

Подставляем выражение (3) в формулу изгибающего момента (6) и выполняем преобразования:

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2) + \frac{24}{h^3}(-\eta_1 + j\eta_2) \int_0^{\frac{h}{2}} f(\zeta_0) z^2 dz \right], \quad (7)$$

где $I = bh^3/12$; $b = \text{const}$, $h = \text{const}$ – ширина и высота стержня.

Подставив выражения (2) и (7) в систему дифференциальных уравнений (1), получаем:

$$\begin{aligned} EI(1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{24}{h^3}(-\eta_1 + j\eta_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^{\frac{h}{2}} f(\zeta_0) z^2 dz \right] - \\ - c\zeta \delta(x - vt) H\left(\frac{l}{v} - t\right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ m \frac{\partial^2 w(x_0)}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + c\zeta = -m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (8) ищем следующим образом:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) q_i(t), \quad (9)$$

где $q_i(t)$ – функция времени; функции $u_i(x)$ являются ортогональными, т.е.

$$\int_0^l u_i(x) u_m(x) dx = 0, \quad i \neq m. \quad (10)$$

Функции $u_i(x)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^4 u_i(x)}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI} p_i^2 u_i(x) = 0, \quad (11)$$

где p_i – собственная частота стержня.

Подставляем решение (9) в выражение (5):

$$\zeta_0 = \left| \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x^2} \right| q_m(t) z. \quad (12)$$

Моделируем совместные поперечные колебания стержня с гистерезисными упруго-диссипативными характеристиками и динамического гасителя. Сначала подставляем решение (9) и выражение (12) в систему дифференциальных уравнений (8). Учитывая дифференциальное уравнение (11), получаем следующее:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[\ddot{q}_i + (1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2)) p_i^2 q_i \right] \mu_i + \frac{3EI}{\rho A} (-\eta_1 + j\eta_2) \times \right. \\ \left. \times q_i \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) \right\} - \frac{c}{\rho A} \times \zeta \delta(x - vt) H\left(\frac{l}{v} - t\right) = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ \sum_{i=1}^{\infty} u_{i0} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta} + n_0^2 \zeta = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $q_{ia} = |q_i|$; $u_{i0} = u_i(x_0)$; $n_0^2 = c/m$.

Умножаем обе стороны полученного дифференциального уравнения на $u_m(x)$ и интегрируем в интервале $[0; l]$. В результате, используя свойства интеграла (10), а также свойства дельта-функции Дирака и функции Хевисайда, после некоторых преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q}_i + \left\{ (1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2))p_i^2 + \frac{3EI}{\rho A d_{2i}}(-\eta_1 + j\eta_2) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \right\} q_i - \mu \mu_0 n_0^2 u_{i0} \zeta H\left(\frac{1}{v} - t\right) = -d_i \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \quad (14)$$

$$u_{i0} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta} + n_0^2 \zeta = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

где $\mu = \frac{m}{\rho A l}$; $\mu_0 = \frac{l}{d_{2i}}$; $d_i = \frac{d_{1i}}{d_{2i}}$; $d_{1i} = \int_0^l u_i dx$; $d_{2i} = \int_0^l u_i^2 dx$.

Выражение (14) представляет собой систему дифференциальных уравнений движения для совместных поперечных колебаний стержня с гистерезисными упруго-диссипативными характеристиками и подвижного динамического гасителя.

Результаты и их обсуждение. Полученная система дифференциальных уравнений движения позволяет оценить динамику поперечных колебаний и проверить устойчивость стержня с гистерезисными упруго-диссипативными характеристиками при различных значениях параметров системы, защищая его от нежелательных вибраций.

Решим систему уравнений (14) с использованием оператора Лапласа и с учетом свойства функции Хевисайда $H(1/v-t)$, где при $1/v-t > 0$ выполняется условие $H(1/v-t)=1$. Найдём решение относительно переменных q_i и ζ :

$$q_i(t) = -\frac{A_{10} + jA_{20}}{B_{10} + jB_{20}} W_0;$$

$$\zeta(t) = -\frac{A_{30} + jA_{40}}{B_{10} + jB_{20}} W_0, \quad (15)$$

где

$$W_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; A_{10} = -\omega^2 + (1 + d_i \mu \mu_0 u_{i0}) n_0^2;$$

$$A_{20} = 0; A_{30} = \left(-\omega^2 + (1 - \eta_1 C_0) p_i^2 - \eta_1 \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \right) d_i + u_{i0} \omega^2;$$

$$A_{40} = d_i \eta_2 \left(C_0 p_i^2 + \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \right);$$

$$\begin{aligned}
B_{10} = & \left[-\omega^2 + (1 - \eta_1 C_0) \right] p_i^2 - \eta_1 \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \times \\
& \times [-\omega^2 + n_0^2] - \eta_2 \left[C_0 p_i^2 + \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \right] n_0^2 - \mu \mu_0 n_0^2 u_{i0}^2 \omega^2; \\
B_{20} = & \left[-\omega^2 + (1 - \eta_1 C_0) \right] p_i^2 - \eta_1 \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \times n_0^2 + \\
& + \eta_2 \left[C_0 p_i^2 + \frac{3EI}{\rho A d_{2i}} \times \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx \right] \times [-\omega^2 + n_0^2]
\end{aligned}$$

Выражение абсолютного ускорения стержня, защищаемого от рассматриваемых колебаний, $W_i = \partial^2 w_i / \partial t^2$, а также отношение искомого выражения ускорения к выражению ускорения основания, можно записать следующим образом:

$$W_i(i\omega, x) = 1 + u_i \omega^2 \frac{A_1 + jA_2}{B_1 + jB_2}. \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой передаточную функцию поперечных колебаний стержня с гистерезисным типом упруго-диссипативных характеристик в сочетании с подвижным динамическим гасителем с линейной упругой характеристикой.

Для определения оптимальных параметров динамического гасителя необходимо провести полный анализ механической системы, защищаемой от рассматриваемых колебаний, и оценить влияние каждого параметра на эту систему. С этой целью, используя метод Ден-Гартога, выводим следующие соотношения для абсолютного значения передаточной функции:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right] \frac{\omega^4}{p_i^4} + \left[((-(A_0 + 2)\eta_2 + \eta_1)C_0 - 1) - (A_0 + 1) \times \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1(-\eta_2(A_0 + 2) + \right. \\
& \left. + \eta_1) \right] \frac{n_0^2}{p_i^2} \frac{\omega^2}{p_i^2} + (A_0 + 1) [(C_0\eta_2 - (C_0\eta_1 - 1)) + (\eta_2 - \eta_1)H_1] \frac{n_0^4}{p_i^4} = 0; \\
& \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right] \frac{\omega^4}{p_i^4} + \left[(-(A_0 + 1)\eta_2 + \eta_1)C_0 - 1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1(-\eta_2 A_0 - 2\eta_2 + \right. \\
& \left. + \eta_1) \right] \frac{n_0^2}{p_i^2} \frac{\omega^2}{p_i^2} + (-A_0 + 1) [(C_0 + H_1)\eta_2 - (C_0\eta_1 - 1 + \eta_1 H_1)] \frac{n_0^4}{p_i^4} = 0,
\end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
A_0 &= d_i \mu \mu_0 u_{i0}; \quad M_0 = \mu \mu_0 u_{i0}^2; \\
H_1 &= \frac{3EI}{\rho A d_{2i} p_i^2} \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k (k+3)} \int_0^l u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx.
\end{aligned}$$

Из полученных уравнений (17) можно определить координаты инвариантных точек на оси частот в амплитудно-частотной плоскости:

$$\begin{aligned}
\omega_{a1,2,3,4} &= \pm \frac{p_i}{2} \left[- \left[(- (A_0 + 2) \eta_2 + \eta_1) C_0 - 1 - (A_0 + 1) \times \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1 (- \eta_2 (A_0 + 2) + \eta_1) \right] \frac{n_0^2}{p_i^2} \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{D_a} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right]^{-\frac{1}{2}}; \\
\omega_{b1,2,3,4} &= \pm \frac{p_i}{2} \left[- \left[(- (A_0 + 1) \eta_2 + \eta_1) C_0 - 1 - (A_0 + 1) \times \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1 (- \eta_2 A_0 - 2 \eta_2 + \eta_1) \right] \frac{n_0^2}{p_i^2} \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{D_b} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right]^{-\frac{1}{2}};
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
D_a &= \left\{ \left[(- (A_0 + 2) \eta_2 + \eta_1) C_0 - 1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1 (- \eta_2 (A_0 + 2) + \eta_1) \right]^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4 \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right] (A_0 + 1) [(C_0 \eta_2 + C_0 \eta_1 - 1) + (\eta_2 - \eta_1) H_1] \right\} \frac{n_0^4}{p_i^4}; \\
D_b &= \left\{ \left[(- (A_0 + 1) \eta_2 + \eta_1) C_0 - 1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} + H_1 (- \eta_2 A_0 - \eta_2 + \eta_1) \right]^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4 \left[\frac{n_0^2}{p_i^2} + \eta_2 (C_0 + H_1) \right] (A_0 + 1) [(C_0 + H_1) \eta_2 - (C_0 \eta_1 - 1 + \eta_1 H_1)] \right\} \frac{n_0^4}{p_i^4}.
\end{aligned}$$

На основе определённых частот (18) и абсолютного значения передаточной функции можно получить следующие соотношения для рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
&\frac{(B_{10a,1} + u_i \omega_{a,1}^2 A_{10a,1})^2 + (B_{20a,1} + u_i \omega_{a,1}^2 A_{20a,1})^2}{B_{10a,1}^2 + B_{20a,1}^2} - \\
&- \frac{(B_{10a,2} + u_i \omega_{a,2}^2 A_{10a,2})^2 + (B_{20a,2} + u_i \omega_{a,2}^2 A_{20a,2})^2}{B_{10a,2}^2 + B_{20a,2}^2} = 0; \\
&\frac{(B_{10b,1} + u_i \omega_{b,1}^2 A_{10b,1})^2 + (B_{20b,1} + u_i \omega_{b,1}^2 A_{20b,1})^2}{B_{10b,1}^2 + B_{20b,1}^2} - \\
&- \frac{(B_{10b,2} + u_i \omega_{b,2}^2 A_{10b,2})^2 + (B_{20b,2} + u_i \omega_{b,2}^2 A_{20b,2})^2}{B_{10b,2}^2 + B_{20b,2}^2} = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{10a,1} &= A_{10}(\omega_{a,1}^2), & A_{10b,1} &= A_{10}(\omega_{b,1}^2), & A_{20a,1} &= A_{20}(\omega_{a,1}^2), & A_{20b,1} &= A_{20}(\omega_{b,1}^2), \\
A_{10a,2} &= A_{10}(\omega_{a,2}^2), & A_{10b,2} &= A_{10}(\omega_{b,2}^2), & A_{20a,2} &= A_{20}(\omega_{a,2}^2), & A_{20b,2} &= A_{20}(\omega_{b,2}^2), \\
B_{10a,1} &= B_{10}(\omega_{a,1}^2), & B_{10b,1} &= B_{10}(\omega_{b,1}^2), & B_{20a,1} &= B_{20}(\omega_{a,1}^2), & B_{20b,1} &= B_{20}(\omega_{b,1}^2), \\
B_{10a,2} &= B_{10}(\omega_{a,2}^2), & B_{10b,2} &= B_{10}(\omega_{b,2}^2), & B_{20a,2} &= B_{20}(\omega_{a,2}^2), & B_{20b,2} &= B_{20}(\omega_{b,2}^2).
\end{aligned}$$

Определённые равенства (19) являются выражениями, не зависящими от частоты ω системы, и представляют собой уравнения взаимосвязи остальных параметров. Значения параметров, удовлетворяющие этим уравнениям, будут оптимальными для рассматриваемой системы.

Чтобы оценить достоверность полученных результатов, рассмотрим следующий случай: пусть диссипативные свойства материала стержня обладают линейно-упругой характеристикой, а $A_0 = \mu$, $n_0 = p_i$. В этом случае уравнения (17) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^4}{p_i^4} - [\mu + 2] \frac{\omega^2}{p_i^2} + (\mu + 1) &= 0; \\ \frac{\omega^4}{p_i^4} - [\mu + 2] \frac{\omega^2}{p_i^2} + (-\mu + 1) &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Если сложить уравнения (20) и разделить на два, можно получить результаты, полученные Ден-Гартогом:

$$\frac{\omega^4}{p_i^4} - [\mu + 2] \frac{\omega^2}{p_i^2} + 1 = 0.$$

Рассмотрим следующий случай: диссипативные свойства материала стержня имеют линейную упругую характеристику и $n_0 \neq p_i$. В этом случае уравнения (17) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^4}{p_i^4} + \left[-1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} \right] \frac{\omega^2}{p_i^2} + (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} &= 0; \\ \frac{\omega^4}{p_i^4} + \left[-1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} \right] \frac{\omega^2}{p_i^2} + (-A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Если сложить уравнения (21) и разделить на два, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\omega^4}{p_i^4} + \left[-1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} \right] \frac{\omega^2}{p_i^2} + \frac{n_0^2}{p_i^2} = 0. \quad (22)$$

Корень уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{\omega^2}{p_i^2} = \frac{1}{2} \left(- \left[-1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} \right] \pm \sqrt{\left[-1 - (A_0 + 1) \frac{n_0^2}{p_i^2} \right]^2 - 4 \frac{n_0^2}{p_i^2}} \right). \quad (23)$$

Это уравнение позволяет определить значения параметров A_0 , n_0 , p_i , которые приводят к резонансу.

Определим частотное уравнение и форму собственных колебаний. Пусть концы стержня зафиксированы, а перемещение основания задано в виде $w_0 = -\varepsilon p_0 \cos \omega t$ (εp_0 – амплитудное значение перемещения основания; ε – малый параметр).

Форму собственных колебаний стержня примем в общем виде [10]:

$$u_i(x) = \Delta_1 K_1(k_i x) + \Delta_2 K_2(k_i x) + \Delta_3 K_3(k_i x) + \Delta_4 K_4(k_i x), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}K_1(k_i x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_i x) + \cos(k_i x)); \quad K_2(k_i x) = \frac{1}{2} (\sinh(k_i x) + \sin(k_i x)); \\ K_3(k_i x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_i x) - \cos(k_i x)); \quad K_4(k_i x) = \frac{1}{2} (\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)).\end{aligned}$$

Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 – коэффициенты, которые определяются из следующих граничных и динамических условий:

$$w_i|_{x=0} = w_0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad w_i|_{x=l} = w_0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3}|_{x=x_0} = -F, \quad (25)$$

F – амплитудное значение силы воздействия движущегося динамического гасителя на стержень.

При граничных условиях $x=0, w_i=w_0$, получаем следующее соотношение:

$$u_{i0} q_{ia} \cos(\omega t + \beta_i) = -\varepsilon p_0 \cos \omega t, \quad (26)$$

где $u_{i0}=u_i(x_0)$; $q_{ia}=q_{ia}(t)$.

Из уравнения (26) получаем следующее:

$$u_{i0} = \pm \frac{\varepsilon p_0}{q_{ia}}. \quad (27)$$

Из граничных условий $\frac{\partial w_i}{\partial x}\bigg|_{x=0,l} = 0$ следует $\frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x=0,l} = 0$.

Из граничного условия $w_i\big|_{x=l} = w_0$ получаем $u_{il} = \pm \varepsilon p_0 / q_{ia}$, ($u_{il}=u_i(l)$).

Из динамического условия $EI \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_0} = -F$ и с учетом $\zeta(t) = \zeta_a(t) \cos(\omega t + \beta_a(t))$, где ζ_a ,

β_a - медленно изменяющиеся функции, определяем амплитуду и начальную фазу переменной ζ :

$$EI \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_0} q_{ia} \cos(\omega t + \beta_i) = -m \omega^2 \zeta_a \cos(\omega t + \beta_a).$$

Из этого уравнения можно получить следующую зависимость:

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_0} = \pm \frac{m \omega^2 \zeta_a}{EI q_{ia}}. \quad (28)$$

Из полученных граничных и динамических условий определяем уравнение частот и коэффициенты формы собственных колебаний и записываем их следующим образом:

$$K_1(k_i x_0) K_2(k_i x_0) - K_3(k_i x_0) K_4(k_i x_0) = 0. \quad (29)$$

$$u_i(x) = K_3(k_i x) - \frac{\sinh(k_i x_0) + \sin(k_i x_0)}{\cosh(k_i x_0) - \cos(k_i x_0)} K_4(k_i x). \quad (30)$$

Предположим, что движущийся динамический гаситель перемещается с постоянной скоростью $v=0.5$ м/с. Тогда, в момент времени $t=1$ с, положение точки будет $x_0=0.5$ м. В этот момент график уравнения частот будет следующим:

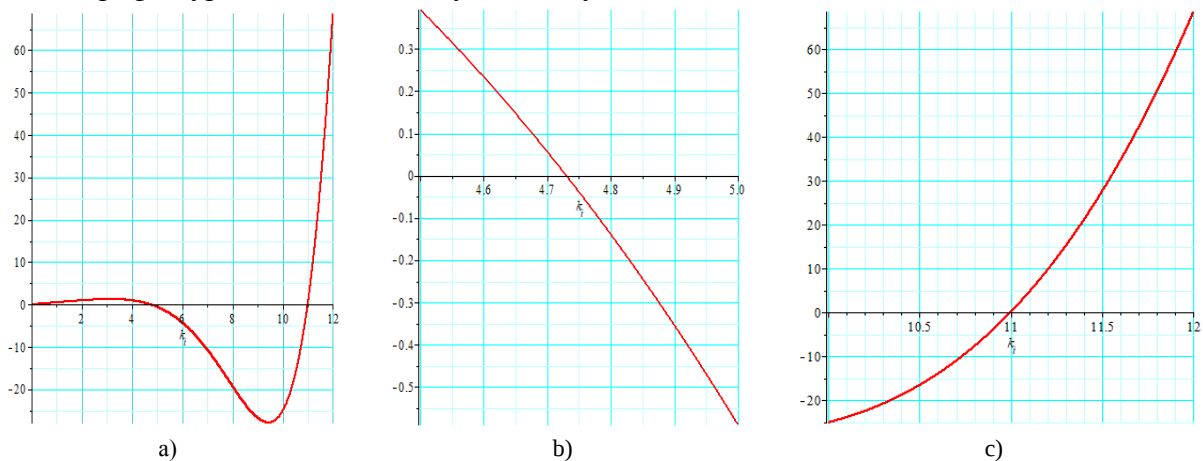


Рис. 2. График уравнения частот.

На рис. 2, представлен график уравнения частот (29). Из графиков на рис. 2,б и 2,с можно определить нули уравнения частот. Из этих графиков можно определить собственные частоты, соответствующие значениям $k_1=4.74$ и $k_2=10.99$.

$$u_1(x) = 0.5(\cosh(4.74x) - \cos(4.74x)) - 0.4907559184(\sinh(4.74x) - \sin(4.74x)). \quad (31)$$

$$u_2(x) = 0.5(\cosh(10.99x) - \cos(10.99x)) - 0.500325466(\sinh(10.99x) - \sin(10.99x)). \quad (32)$$

Графики первой и второй форм собственных колебаний, соответствующие уравнениям (31) и (32), будут следующими:

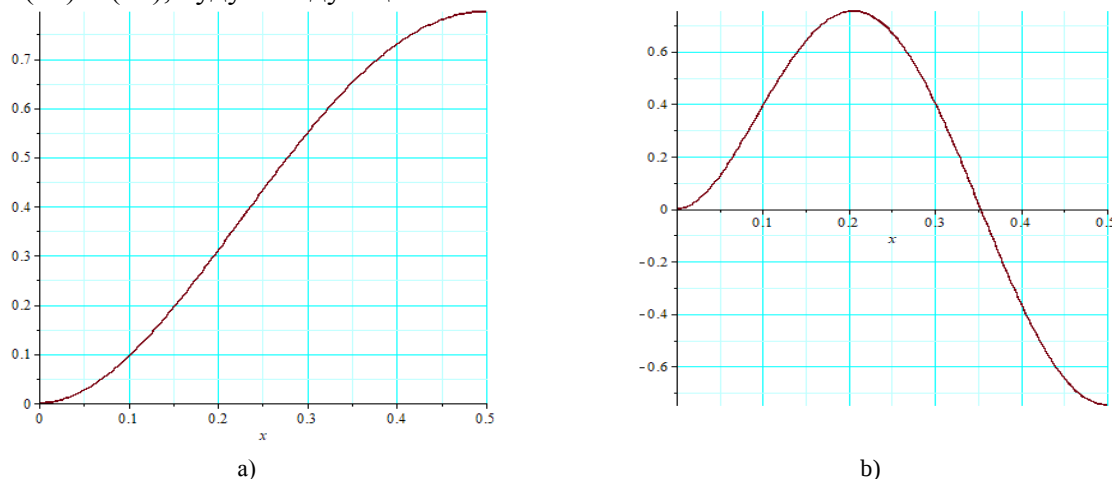


Рис. 3. Графики форм собственных колебаний (31) и (32)

На рис. 3 представлены графики форм собственных колебаний (31) и (32) в случае, когда движущийся динамический гаситель находится в середине стержня. Поскольку колебания стержня являются симметричными, графики показаны для половины его длины. Эти графики позволяют определить интервалы возрастания и убывания первой формы собственных колебаний (график на рис. 3, а) и второй формы (график на рис. 3, б).

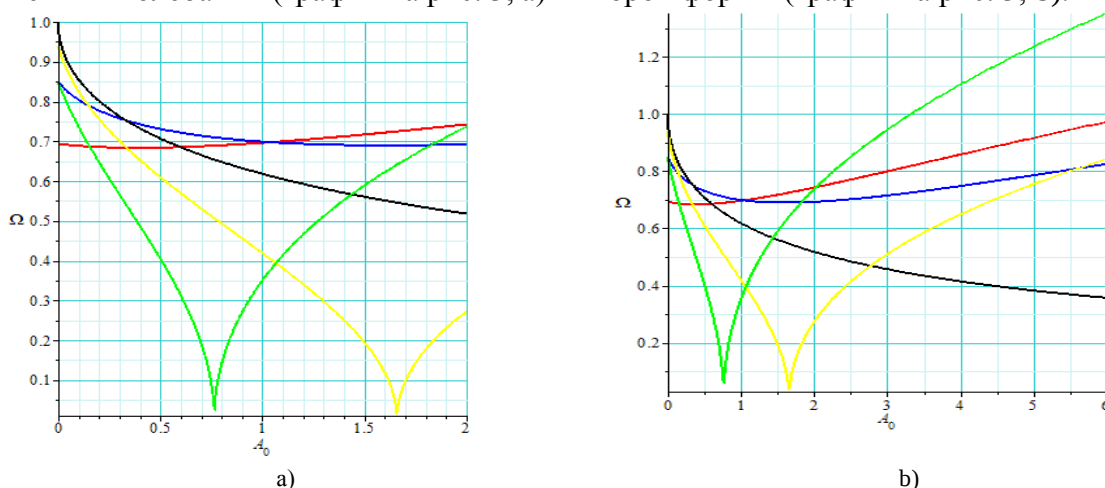


Рис. 4. График функции (23) ($\Omega=\omega/p_i$)

На рис. 4, а и 4, б представлены графики функции (23). При $n_0/p_i=0.6;0.8;1.0;1.2;1.4$ (линии соответственно, красная, синяя, черная, желтая, зеленая) показано изменение A_0 в зависимости от параметра. Отсюда видно, что при $n_0/p_i > 1$, резонанс происходит при двух значениях параметра A_0 , тогда как при $n_0/p_i \leq 1$ резонанс происходит только при одном значении A_0 . Кроме того, можно сказать, что при двух различных значениях отношения n_0/p_i , отношение ω/p_i и параметр A_0 могут принимать одинаковые значения. Например, в случаях $n_0/p_i=1.2$ и $n_0/p_i=1.4$, значения $\omega/p_i=0.4$ и $A_0=1.05$ остаются неизменными. Также можно увидеть, что существует еще 11 таких точек.

Заклучение.

1. Разработана математическая модель колебаний стержня с гистерезисным типом упругих диссипативных характеристик в сочетании с движущимся динамическим гасителем с линейной упругой характеристикой.

2. Для колебаний стержня с гистерезисным типом упругих диссипативных характеристик и движущимся динамическим гасителем с линейной упругой характеристикой аналитически определено и проанализировано выражение передаточной функции в зависимости от параметров и переменных системы.

3. Разработан метод определения оптимальных параметров динамического гасителя при колебаниях стержня с гистерезисным типом упругих диссипативных характеристик и движущимся динамическим гасителем с линейной упругой характеристикой, а также даны рекомендации по их определению на основе численного анализа.

4. Определены первая и вторая формы собственных колебаний, показаны их интервалы возрастания и убывания на основе численных расчетов.

5. Достоверность полученных результатов подтверждена воспроизведением известных результатов из литературы для частных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Liu P., Ni Q., Wang L., Yuan L. Stability and local bifurcation in a simply-supported beam carrying a moving mass // Acta Mech. Solida Sin. 2007, Vol. 20, No. 2, pp. 123–129.
- [2] Albassam B.A. Vibration control of a flexible beam structure utilizing dynamic Green's function // J. King Saud Univ. - Eng. Sci. 2021, Vol. 33, No. 3, pp. 186–200.
- [3] Wang M.-Q., Chen E., Liu P., Qi Zh., Wang J., Chang Y. Periodic response characteristics on a piecewise hysteresis non-linear system // J. Low Freq. Noise, Vib. Act. Control. 2021, Vol. 40, No. 1, pp. 104–119.
- [4] Gbadeyan J.A., Ogunmiloro O.M., Fadugba S.E. Dynamic response of an elastically connected double non-mindlin plates with simply-supported end condition due to moving load // Khayyam J. Math. 2019, Vol. 5, No. 1, pp. 40–59.
- [5] Greco A., Santini A. Dynamic response of a flexural non-classically damped continuous beam under moving loadings // Comput. Struct. 2002, Vol. 80, No. 26, pp. 1945–1953.
- [6] Wu J.-J. Study on the inertia effect of helical spring of the absorber on suppressing the dynamic responses of a beam subjected to a moving load // J. Sound Vib. 2006, Vol. 297, No. 3–5, pp. 981–999.
- [7] Museros P., Martinez-Rodrigo M.D. Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers // J. Sound Vib. 2007, Vol. 300, No. 1–2, pp. 292–315.
- [8] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. Киев: Наук. думка, 1971, 327 с.
- [9] Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. К.: Техника, 1997, 204 с.
- [10] Mirsaidov M., Dusmatov O., Khodjabekov M. Mode Shapes of Transverse Vibrations of Rod Protected from Vibrations in Kinematic Excitations // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021, Vol. 170, pp. 217–227.

Дата поступления
15.01.2025

M.U.Xodjabekov, Z.S.Yuldosheva. Sterjenning harakatlanuvchi dinamik so'ndirgich bilan birgalikdagi tebranishlari dinamikasi

Annotatsiya. Ushbu ishda gisterizis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjenning harakatlanuvchi chiziqli elastik xarakteristikali dinamik so'ndirgich bilan birgalikdagi tebranishlarining dinamikasi o'rganilgan. Dastlab harakat differentsial tenglamalari olinib, ortogonallashtirish shartlari asosida xususiy tebranish formalarining ortogonal shakllari uchun harakat differentsial tenglamalari hosil qilingan. Laplas operatori yordamida harakat differentsial tenglamalari algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilgan. Uzatish funktsiyasining analitik ifodasi sistema parametrlariga bog'liq holda aniqlangan. Den Gartog usuliga asosan chastotalar aniqlanib, optimal parametrlarni aniqlash uchun analitik ifodalar olingan. Qistirib mahkamlangan chegaraviy shartlar uchun xususiy tebranish formalari va xususiy chastotalari aniqlanib, dinamik so'ndirgich massasining sterjen massasiga nisbatining o'zgarishi bilan chastotaning o'zgarishi sonli tahlil qilingan hamda xulosalar olingan.

Kalit so'zlar: chastota; tebranish formalari; amplituda; uzatish funktsiyasi; tebranish; sterjen; dina-mik so'ndirgich.

M.U. Khodjabekov, Z.S. Yuldosheva. Dynamics of joint vibrations of a beam with a moving dynamic absorber

Abstract. The dynamics of joint vibrations of a beam with hysteresis-type elastic dissipative characteristics and a moving linear elastic absorber are studied. Initially, differential equations of motion are obtained, and differential equations of motion for orthogonal forms of eigenmodes of vibration are derived based on orthogonalization conditions. Using the Laplace operator, the differential equations of motion are reduced to a system of algebraic equations. An analytical expression for the transfer function is determined depending on the system parameters. Based on the Den-Hartog method, frequencies are calculated, and analytical expressions are obtained to determine the optimal parameters. For boundary conditions fixed at the ends, the forms and frequencies of natural oscillations are determined, a numerical analysis of the change in frequencies depending on the ratio of the mass of the dynamic damper to the mass of the rod is performed, and conclusions are drawn.

Keywords: frequency; mode shapes; amplitude; transfer function; vibration; beam; dynamic absorber.

КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОЙ БАЛКИ (ПЛИТЫ), УСТАНОВЛЕННОЙ НА ДВУХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОПОРАХ (СВАЯХ), С КУСОЧНО ОДНОРОДНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОСТЕЛИ ГРУНТА

Мардонов Б.М., Нишонов Н.А., Бердибаев М.Ж., Хуррамов А.Ч.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: mars.berdibaev@mail.ru*

Аннотация. Поведение опор играет большую роль в эксплуатации автомагистральных мостов во время землетрясений. Для многих автомагистральных мостов опоры притягивают большую часть сейсмической силы, особенно в продольном направлении. Производительность мостовой конструкции во время землетрясения, вероятно, зависит от близости моста к разлому и условиям участка. Оба этих фактора влияют на интенсивность сотрясения грунта и деформации грунта, а также на изменчивость этих эффектов по длине моста. В данной работе изучены вопросы влияния глубины заложения на напряжённое состояние двух опор моста в виде свай при кинематическом возбуждении основания.

Ключевые слова: свая, опора, автомагистральные мосты, сейсмическая сила, кинематическое возбуждение, глубина заложения.

Введение. Влияние условий участка на реагирование моста стало широко признано после землетрясения в Лома-Приета в 1989 году. На рис.1 показаны места небольших и крупных повреждений мостов от землетрясения в Лома-Приета [1-2]. За некоторым исключением, наиболее значительные повреждения произошли вокруг периметра или в пределах залива Сан-Франциско, где относительно глубокие и мягкие почвенные отложения усиливали движение коренных пород. Во время этого землетрясения, места обрушения виадука на улице Киприс практически совпали с зонами естественного и искусственного заполнения, где землетрясение, вероятно, было наиболее сильным (рис. 2) [3-7]. Основным вывод, который следует сделать из этого и других землетрясений, - это значительное влияние местных условий на усиление движения грунта и последующее повышение уязвимости мостов на участках с мягким грунтом. Это наблюдение важно, потому что многие мосты и возвышенные дорожные пути пересекают водные объекты, где распространены отложения мягкой почвы. Во время землетрясения в Хёго-Кен Нанбу (Кобе) в 1995 году, значительный ущерб и обрушение также произошли на возвышенных дорогах и мостах, построенных рядом с или в пределах залива Осака [6]. Несколько типов условий участка способствовали повреждениям. Во-первых, многие мосты были построены на песчано-гравийных террасах (аллювиальных отложениях), лежащих на гравийно-песчано-глинистых отложениях на глубине менее 33 футов (10 м), что, как считается, привело к усилению движения коренных горных пород.

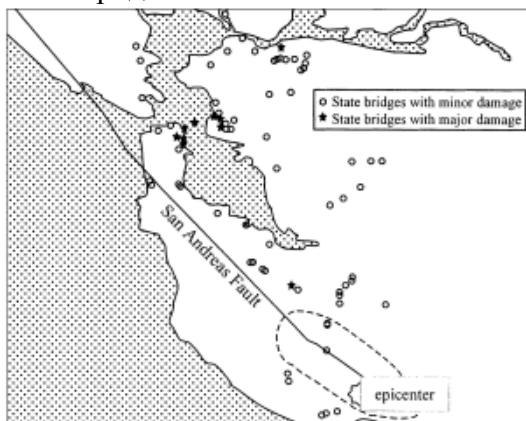


Рис. 1. Частота незначительных и значительных повреждений при землетрясении в Лома-Приета в 1989 году [изменено с Зелински, 16]

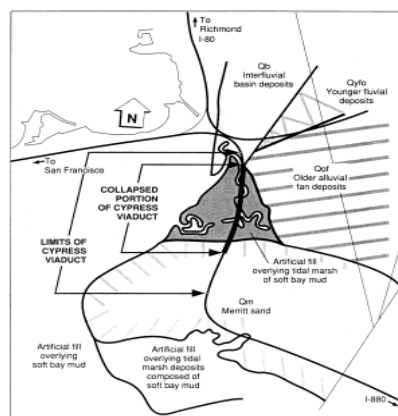


Рис. 2. Геологическая карта участка виадука на улице Кипресс. (Источник: Housner, G., Report to the Governor, Office of Planning and Research, State of California, 1990.)



Рис. 3. Обрушение пролета подхода к мосту Нишиномия-ко при землетрясении Хёго-Кен-Нанбу в 1995 году [Собрание Кобе, Библиотека EERC, Калифорнийский университет, Беркли]

Кроме того, многие участки подверглись разжижению и боковому расширению, что привело к постоянным деформациям подструктуры и потере надстройки опоры (рис.3). Наконец, участок находился непосредственно над разрывом разлома, что привело к движениям грунта с высокими горизонтальными и вертикальными ускорениями грунта, а также большими импульсами скорости. Движение грунта вблизи разлома может предъявлять большие деформационные требования к податливым конструкциям, как это было видно при опрокидывающемся обрушении всех 17 прогибов проезда Хигаси-Нада автомагистрали Хансин, маршрут 3, в Кобе (рис. 4).

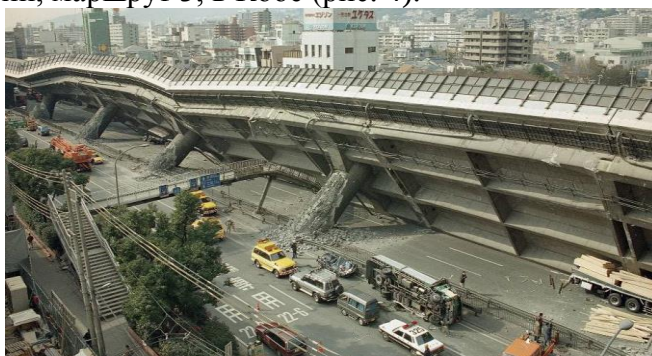


Рис. 4. Обрушение проезда Хигаси-Нада в результате землетрясения Хёго-Кен-Нанбу в 1995 году. (Источник: EERI, The Hyogo-Ren Nambu earthquake, January 17, 1995, Preliminary Reconnaissance Report, Feb. 1995)

При проведении расчетов несущей способности и осадки одиночных свай предпочтение следует отдавать табулированным или аналитическим решениям, приведенным в строительных правилах. При проектировании свайных фундаментов следует учитывать следующие факторы: грунтовые условия площадки строительства; гидрогеологический режим; особенности устройства свай; наличие шлама под нижним концом свай. Все расчеты свай, свайных фундаментов и их оснований следует выполнять с использованием расчетных значений характеристик материалов и грунтов. Расчетные значения характеристик грунтов следует определять в соответствии с ГОСТ 20522, а расчетные значения коэффициентов постели грунта, окружающего сваю, следует принимать в соответствии с Приложением [8-11]. В работе [12] представлены анализ и результаты исследовательских работ свайных фундаментов, взаимодействующих с различными видами просадочных грунтов. Основные требования, предъявляемые к конструк-

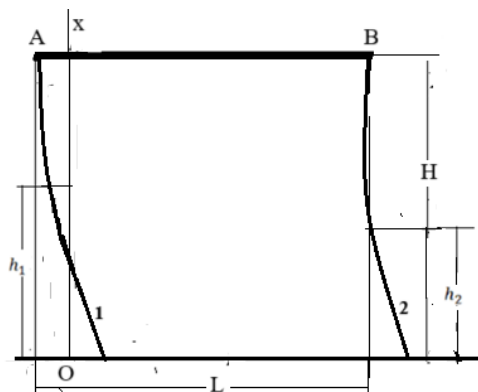


Рис. 5. Схема колебания двух свай, несущих жесткую балку.

циям свайных фундаментов, представлены в руководствах [13-14]. Методика расчета свайных фундаментов при действии сейсмических волн и при кинематических возбуждениях изложена в работах [14-17].

В данной работе изучено колебание двух свай в виде балок квадратного сечения с равными длинами L , частично заложённых в грунтовую среду, и совместно несущей жесткой балки массой M , причем каждая свая взаимодействует с грунтовой средой по закону Винклера (рис. 5). Основание совершает горизонтальное движение по закону $w = W_0 \sin \omega t$.

Метод решения. Установим начало координат в нижнем сечении первой сваи и направим ось Ox вертикально вверх. Прогибы каждой сваи обозначим через $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$. При этом полагаем

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= w_{11}(x, t) \text{ при } 0 < x < h_1, \quad w_1(x, t) = w_{12}(x, t) \text{ при } h_1 < x < H \\ w_2(x, t) &= w_{21}(x, t) \text{ при } 0 < x < h_2, \quad w_2(x, t) = w_{22}(x, t) \text{ при } h_2 < x < H, \end{aligned}$$

где h_1 и h_2 – длина каждой сваи, заглубленной в грунт, H – их общая длина. В каждой зоне прогибы $w_{ij}(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$EJ \frac{\partial^4 w_{11}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial t^2} + k_1 w_{11} = 0 \text{ при } 0 < x < h_1 \quad (1)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{12}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial t^2} = 0 \text{ при } h_1 < x < H \quad (2)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{21}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial t^2} + k_2 w_{21} = 0 \text{ при } 0 < x < h_2 \quad (3)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{22}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial t^2} = 0 \text{ при } h_2 < x < H \quad (4)$$

Функции $w_{ij}(x, t)$ удовлетворяют нулевым начальным и следующим граничным условиям

$$\frac{\partial w_{11}}{\partial x} = 0, EJ \frac{\partial^3 w_{11}}{\partial x^3} = k_0 (w_{11} - w_0) \text{ при } x=0 \quad (5)$$

$$w_{11} = w_{12}, \quad \frac{\partial w_{11}}{\partial x} = \frac{\partial w_{12}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_{11}}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_{12}}{\partial x^3}, \text{ при } x=h_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_{21}}{\partial x} = 0, EJ \frac{\partial^3 w_{21}}{\partial x^3} = k_0 (w_{21} - w_0) \text{ при } x=0 \quad (7)$$

$$w_{21} = w_{22}, \quad \frac{\partial w_{21}}{\partial x} = \frac{\partial w_{22}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_{21}}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_{22}}{\partial x^3}, \text{ при } x=h_2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial w_{12}}{\partial x} = 0, \frac{\partial w_{22}}{\partial x} = 0, w_{12} = w_{22} = w(t), \quad \frac{\partial^3 w_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_{22}}{\partial x^3} = \frac{M}{EJ} \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial t^2} \text{ при } x=H \quad (9)$$

EJ – изгибная жесткость балки, m – погонная масса, k_1, k_2 – коэффициенты постели для каждой зоны контакта сваи (балки) с грунтом, соответственно, k_0 – коэффициент жесткости контакта при сдвиге нижнего сечения балок с основанием, $w(t)$ – перемещение жесткой балки.

Решение уравнений (1)–(4) и амплитуду колебания балки $w(t)$ представим в виде

$$w_{ij}(x, t) = W_{ij}(x) \sin \omega_0 t, \quad w = W \sin \omega_0 t,$$

где функции $C_{ij}(x)$ удовлетворяют уравнениям и, согласно (5)–(8), следующим условиям

$$EJ \frac{\partial^4 w_{11}}{\partial x^4} + (k_1 - m\omega_0^2)W_{11} = 0 \text{ при } 0 < x < h_1 \quad (10)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{12}}{\partial x^4} - m\omega_0^2 W_{12} = 0 \text{ при } h_1 < x < H \quad (11)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{21}}{\partial x^4} + (k_2 - m\omega_0^2)W_{21} = 0 \text{ при } 0 < x < h_2 \quad (12)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_{22}}{\partial x^4} - m\omega_0^2 W_{22} = 0 \text{ при } h_2 < x < H \quad (13)$$

$$W'_{11} = 0, W'''_{11} = k_0(W_{11} - W_0) \text{ при } x=0 \quad (14)$$

$$W_{11} = W_{12}, W'_{11} = W'_{12}, W''_{11} = W''_{12}, W'''_{11} = W'''_{12}, \text{ при } x = h_1 \quad (15)$$

$$W'_{12} = 0, W'''_{12} = k_0(W_{12} - W_0) \text{ при } x = 0 \quad (16)$$

$$W_{21} = W_{22}, W'_{21} = W'_{22}, W''_{21} = W''_{22}, W'''_{21} = W'''_{22}, \text{ при } x = h_2 \quad (17)$$

$$W'_{12} = 0, W'_{22} = 0, W_{12} = W, W_{22} = W, \text{ при } x = H \quad (18)$$

Рассмотрим случай жесткого контакта балки со сваями, т. е., полагаем, что $k_0 \rightarrow \infty$. В этом случае, уравнение движения балки (9) записывается в виде

$$W'''_{12} + W'''_{22} = -W \frac{M}{EJ} \omega_0^2.$$

Полагая, что $k_2 < k_1$, $\omega_0 < \sqrt{k_2/4m}$, решение уравнений (9)-(12), удовлетворяющих условиям (15) и (17), представим через функции Крылова

$$W_{11} = C_1 Y_1(\beta_1(\xi - \bar{h}_1)) + \frac{C_2 \omega Y_2(\beta_1(\xi - \bar{h}_1))}{2\beta_1 b} + C_3 \omega^2 Y_3(\beta_1(\xi - \bar{h}_1)) / 2\beta_1^2 + C_4 \omega^3 Y_4(\beta_1(\xi - \bar{h}_1)) / 4\beta_1^3,$$

$$W_{12} = C_1 S_1[\omega(\xi - \bar{h}_1)] + C_2 S_2[\omega(\xi - \bar{h}_1)] + C_3 S_3[\omega(\xi - \bar{h}_1)] + C_4 S_4[\omega(\xi - \bar{h}_1)],$$

$$W_{21} = B_1 Y_1(\beta_2(\xi - \bar{h}_2)) + \frac{B_2 \omega Y_2(\beta_2(\xi - \bar{h}_2))}{2\beta_2} + B_3 \omega^2 Y_3(\beta_2(\xi - \bar{h}_2)) / 2\beta_2^2 + B_4 \omega^3 Y_4(\beta_2(\xi - \bar{h}_2)) / 4\beta_2^3,$$

$$W_{22} = B_1 S_1[\omega(\xi - \bar{h}_2)] + B_2 S_2[\omega(\xi - \bar{h}_2)] + B_3 S_3[\omega(\xi - \bar{h}_2)] + B_4 S_4[\omega(\xi - \bar{h}_2)],$$

где $Y_j(z)$ и $S_j(z)$ - функции Крылова.

$$Y_1 = \cos \beta_1 z \operatorname{ch} \beta_1 z, \quad Y_2 = (\sin \beta_1 z \operatorname{ch} \beta_1 z + \cos \beta_1 z \operatorname{sh} \beta_1 z),$$

$$Y_3 = \sin \beta_1 z \operatorname{sh} \beta_1 z, \quad Y_4 = (\sin \beta_1 z \operatorname{ch} \beta_1 z - \cos \beta_1 z \operatorname{sh} \beta_1 z),$$

$$S_1 = 0.5 * (\operatorname{ch} \omega z + \cos \omega z), \quad S_2 = 0.5 * (\operatorname{sh} \omega z + \sin \omega z),$$

$$S_3 = 0.5 * (\operatorname{ch} \omega z - \cos \omega z), \quad S_4 = 0.5 * (\operatorname{sh} \omega z - \sin \omega z),$$

$$\xi = \frac{x}{H}, \omega = \sqrt{\frac{mL^4 \omega_0^2}{EJ}}, \beta_1 = \sqrt[4]{\omega_1^2 - \omega^2}, \beta_2 = \sqrt[4]{\omega_2^2 - \omega^2}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 L^4}{4EJ}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 L^4}{4EJ}}, \bar{h}_1 = \frac{h_1}{H}, \bar{h}_2 = \frac{h_2}{H}.$$

Постоянные $C_i, B_i (i=1,2,3,4)$ определяются из граничных условий (14,16,18), которые дают

$$c_{11}C_1 + c_{12}C_2 + c_{13}C_3 + c_{14}C_4 = W_0, \quad (19)$$

$$c_{12}C_1 + c_{22}C_2 + c_{23}C_3 + c_{24}C_4 = 0, \quad (20)$$

$$b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3 + b_{14}B_4 = W_0, \quad (21)$$

$$b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3 + b_{24}B_4 = 0, \quad (22)$$

$$a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 + a_{14}C_4 = W, \quad (23)$$

$$a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3 + a_{24}C_4 = 0, \quad (24)$$

$$d_{11}B_1 + d_{12}B_2 + d_{13}B_3 + d_{14}B_4 = W, \quad (25)$$

$$d_{21}B_1 + d_{22}B_2 + d_{23}B_3 + d_{24}B_4 = 0, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= Y_1(-\beta_1 \bar{h}_1), c_{12} = Y_2(-\beta_1 \bar{h}_1) \omega / 2\beta_1, c_{13} = Y_3(-\beta_1 \bar{h}_1) \omega^2 / 2\beta_1^2, c_{14} = Y_4(-\beta_1 \bar{h}_1) \omega^3 / 4\beta_1^3, \\ c_{21} &= -\beta_1 Y_4(-\beta_1 \bar{h}_1), c_{22} = \omega Y_1(-\beta_1 \bar{h}_1), c_{23} = Y_2(-\beta_1 \bar{h}_1) \omega^2 / 2\beta_1, c_{24} = Y_3(-\beta_1 \bar{h}_1) \omega^3 / 2\beta_1, \\ b_{11} &= Y_1(-\beta_2 \bar{h}_2), b_{12} = \omega Y_2(-\beta_2 \bar{h}_2) / 2\beta_2, b_{13} = Y_3(-\beta_2 \bar{h}_2) \omega^2 / 2\beta_2^2, b_{14} = Y_4(-\beta_2 \bar{h}_2) \omega^3 / 4\beta_2^3, \\ b_{21} &= -\beta_2 Y_4(-\beta_2 \bar{h}_2), b_{22} = \omega Y_1(-\beta_2 \bar{h}_2), b_{23} = Y_2(-\beta_2 \bar{h}_2) \omega^2 / 2\beta_2, b_{24} = Y_3(-\beta_2 \bar{h}_2) \omega^3 / 2\beta_2, \\ a_{11} &= S_1(\omega \bar{l}_1), a_{12} = S_2(\omega \bar{l}_1), a_{13} = S_3(\omega \bar{l}_1), a_{14} = S_4(\omega \bar{l}_1), \\ a_{21} &= S_4(\omega \bar{l}_1), a_{22} = S_1(\omega \bar{l}_1), a_{23} = S_2(\omega \bar{l}_1), a_{24} = S_3(\omega \bar{l}_1), \\ d_{11} &= S_1(\omega \bar{l}_2), d_{12} = S_2(\omega \bar{l}_2), d_{13} = S_3(\omega \bar{l}_2), d_{14} = S_4(\omega \bar{l}_2), \\ d_{21} &= S_4(\omega \bar{l}_2), d_{22} = S_1(\omega \bar{l}_2), d_{23} = S_2(\omega \bar{l}_2), d_{24} = S_3(\omega \bar{l}_2) \end{aligned}$$

где $\bar{l}_1 = 1 - \bar{h}_1, \bar{l}_2 = 1 - \bar{h}_2, \bar{h}_1 = h_1 / H, \bar{h}_2 = h_2 / H$.

Полагаем, что

$$C_i = r_i W + s_i W_0, B_i = q_i W + n_i W_0, \quad (27)$$

где r_i, s_i, q_i и n_i определяются из системы (19)-(26)

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{P_2}{\Delta_1}, r_2 = -\frac{P_1}{\Delta_1}, r_3 = r_1 F_1 + r_2 F_2, r_4 = r_1 R_1 + r_2 R_2, \\ s_1 &= [(a_{23} F_0 + a_{24} R_0) N_2 - (a_{13} F_0 + a_{14} R_0) P_2] / \Delta_1, \\ s_2 &= [(a_{13} F_0 + a_{14} R_0) P_2 - (a_{23} F_0 + a_{24} R_0) N_1] / \Delta_1, \\ s_3 &= s_1 F_1 + s_2 F_2, s_4 = s_1 R_1 + s_2 R_2, \Delta_1 = N_1 P_2 - N_2 P_1, \\ F_1 &= (c_{14} c_{21} - c_{24} c_{11}) / \Delta_0, F_2 = (c_{14} c_{22} - c_{24} c_{12}) / \Delta_0, F_0 = c_{24} / \Delta_0, \\ R_1 &= (c_{23} c_{11} - c_{13} c_{21}) / \Delta_0, R_2 = (c_{23} c_{12} - c_{13} c_{22}) / \Delta_0, R_0 = -c_{23} / \Delta_0, \\ N_1 &= a_{12} + a_{13} F_1 + a_{14} R_1, N_2 = a_{11} + a_{13} F_2 + a_{14} R_2, \\ N_0 &= a_{12} + a_{13} F_0 + a_{14} R_0, \\ P_1 &= a_{12} + a_{23} F_1 + a_{24} R_1, P_2 = a_{22} + a_{23} F_2 + a_{24} R_2, \\ P_0 &= -a_{23} F_0 + a_{24} R_0, \Delta_0 = c_{13} c_{24} - c_{14} c_{23}, \end{aligned}$$

$$q_1 = \frac{Z_2}{\Delta_2}, q_2 = -\frac{Z_1}{\Delta_2}, q_3 = q_1 Q_1 + q_2 Q_2, q_4 = q_1 T_1 + q_2 T_2,$$

$$n_1 = [(b_{23}Q_0 + b_{24}T_0)M_2 - (b_{13}Q_0 + b_{14}T_0)Z_2]/\Delta_2, \quad n_2 = [(b_{13}Q_0 + b_{14}T_0)Z_1 - (b_{23}Q_0 + b_{24}T_0)M_1]/\Delta_2,$$

$$n_3 = n_1 Q_1 + n_2 Q_2, n_4 = n_1 T_1 + n_2 T_2, \Delta_2 = M_1 Z_2 - M_2 Z_1$$

$$Q_1 = (b_{14}b_{21} - b_{24}b_{11})/\Delta_{01}, Q_2 = (b_{14}b_{22} - b_{24}b_{12})/\Delta_{01}, Q_0 = b_{24}/\Delta_{01}$$

$$T_1 = (b_{23}b_{21} - b_{13}b_{21})/\Delta_{01}, T_2 = (b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22})/\Delta_{01}, T_0 = -b_{23}/\Delta_{01}$$

$$M_1 = d_{12} + d_{13}Q_1 + d_{14}T_1, M_2 = d_{11} + d_{13}Q_2 + d_{14}T_2, M_0 = d_{12} + d_{13}Q_0 + d_{14}T_0,$$

$$Z_1 = d_{12} + d_{23}Q_1 + d_{24}T_1, Z_2 = d_{22} + d_{23}Q_2 + d_{24}T_2, Z_0 = -d_{23}Q_1 + d_{24}T_0, \Delta_0 = b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23}.$$

Подставляя выражения C_i и B_i из (28) в (18), получим

$$W = W_0 \frac{\omega U_0}{\alpha + \omega U_1},$$

где $\alpha = M/mH$

$$U_0 = a_{12}s_1 + a_{13}s_2 + a_{14}s_3 + a_{11}s_4 + d_{12}n_1 + d_{13}n_2 + d_{14}n_3 + d_{11}n_4,$$

$$U_1 = a_{12}r_1 + a_{13}r_2 + a_{14}r_3 + a_{11}r_4 + d_{12}q_1 + d_{13}q_2 + d_{14}q_3 + d_{11}q_4.$$

Результаты расчетов. На рис. 6 представлены кривые зависимости перемещений жесткой балки W (отнесенных к W_0), от безразмерной частоты ω . Кривые распределения прогибов W_1 и W_2 (отнесённых к W_0) и продольных напряжений $\sigma_i = Ea \frac{d^2 W_i}{dx^2}$ ($i=1,2$, a – длина сторон квадрата) вдоль каждой сваи при различных значениях, безразмерной частоте и глубине заложения второй сваи h_2 (отнесённой к длине сваи) в грунтовой среде, представлены на рис.7 и 8, где в расчетах принято $E=4 \cdot 10^{10}$ Па, $k_1=k_2=10^5$ Н/м², $M=5000$ кг, $a=0.3$ м, $H=10$ м, $\bar{h}_1 = 0.8$.

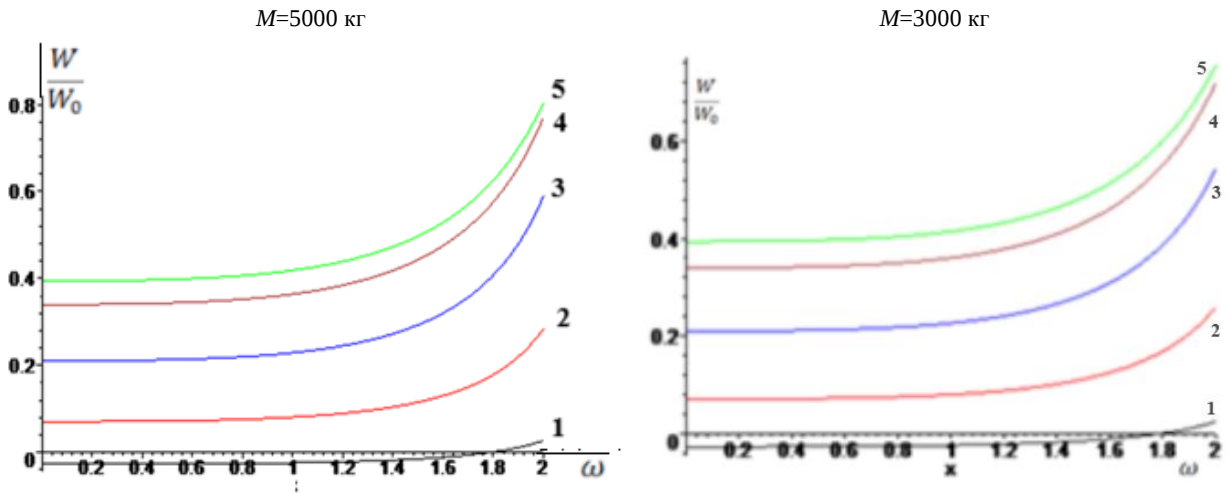
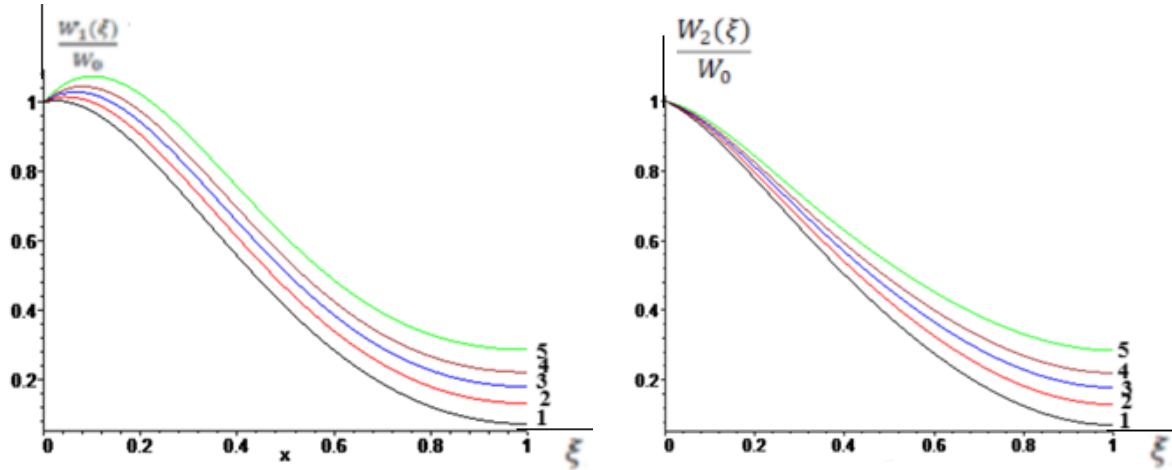


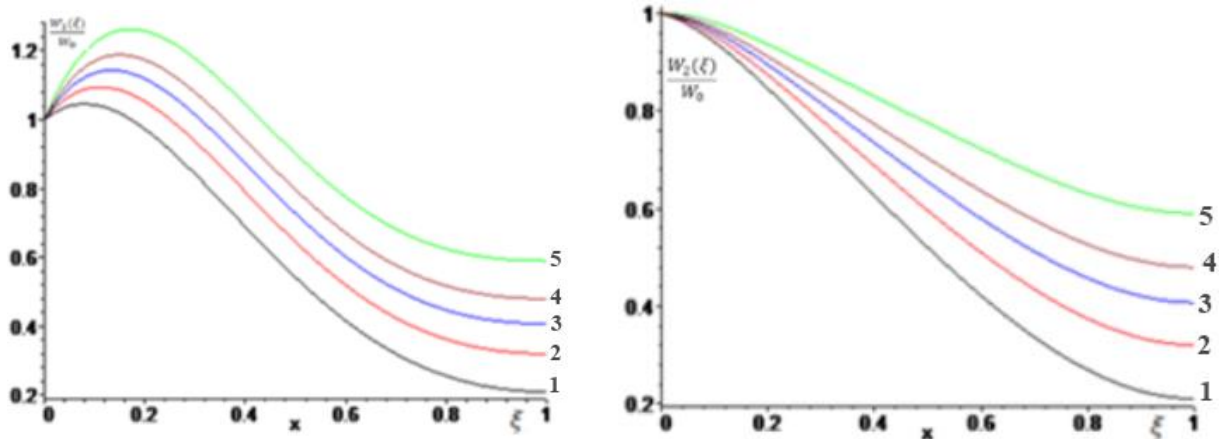
Рис.6 Зависимости перемещения жесткой балки от безразмерной частоты ω для двух значений ее массы M и данных заглубления h_2 второй сваи (отнесенной к H): 1 – $\bar{h}_2=0.5$, 2 – $\bar{h}_2=0.4$, 3 – $\bar{h}_2=0.3$, 4 – $\bar{h}_2=0.2$, 5 – $\bar{h}_2=0.1$

Из анализа кривых, представленных на рис.6, следует, что при изменении частоты ω в диапазоне $0 < \omega < 1$, значение перемещения жесткой балки остаётся постоянным и со снижением глубины заложения второй сваи, его амплитуда увеличивается. Рост массы балки также приводит к увеличению ее перемещения.

$$\bar{h}_2 = 0.4$$



$$\bar{h}_2 = 0.3$$



$$\bar{h}_2 = 0.2$$

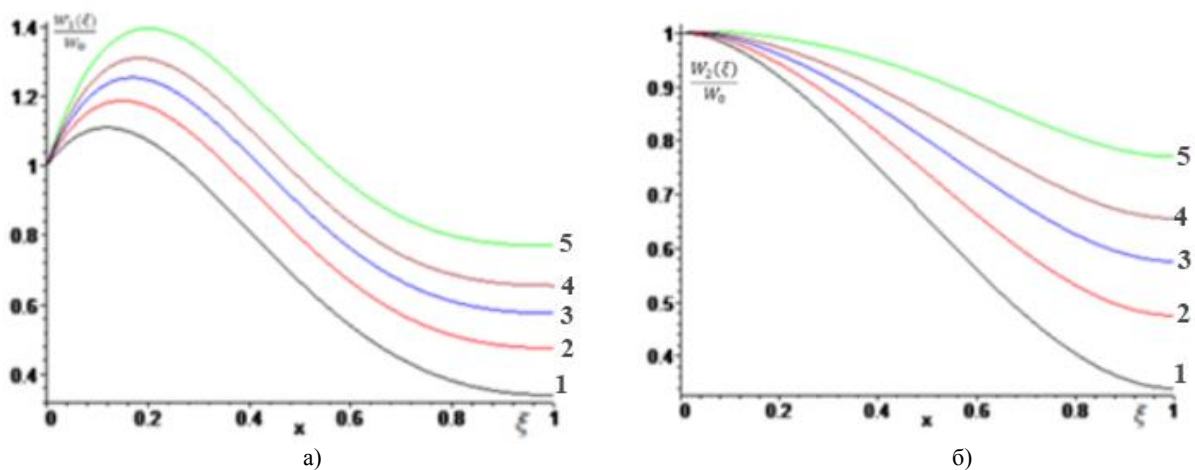
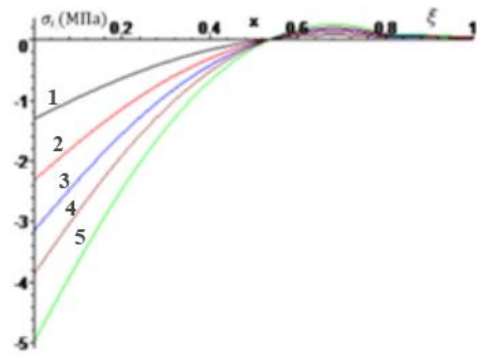
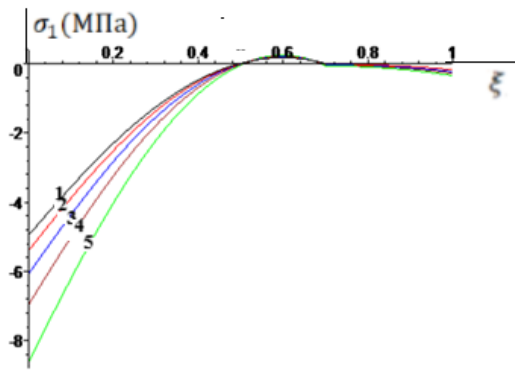
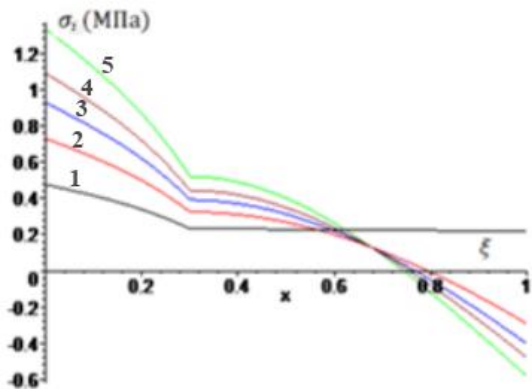
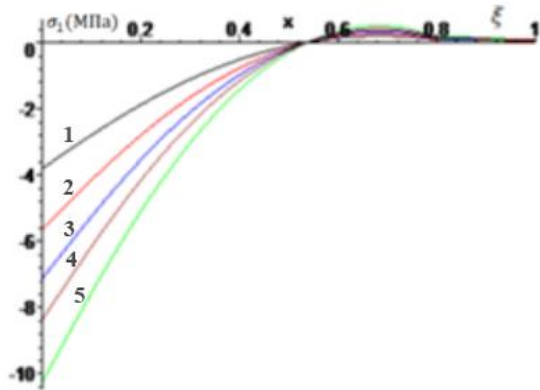


Рис. 7. Кривые распределения прогибов (отнесённых к W_0) первой сваи а) и второй сваи б) при $M=5000$ кг, при различных значениях безразмерной частоты ω и глубины заложения h_2 второй сваи (отнесённой к H)
1- $\omega=0.05$, 2- $\omega=1.6$, 3- $\omega=1.8$, 4- $\omega=1.9$, 5- $\omega=2$

$$\bar{h}_2 = 0.4$$



$$\bar{h}_2 = 0.3$$



$$\bar{h}_2 = 0.2$$

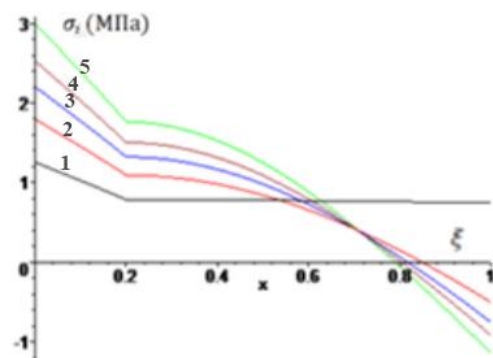
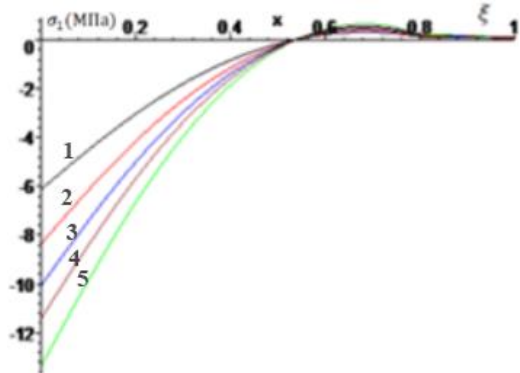


Рис.8 Кривые распределения напряжений по длине а) первой сваи и б) второй сваи при $M=5000$ кг, при различных значениях безразмерной частоты ω и глубины заложения h_2 второй сваи (отнесённой к H)
1- $\omega=0.05$, 2- $\omega=1.6$, 3- $\omega=1.8$, 4- $\omega=1.9$, 5- $\omega=2$

Выводы. Характер колебательного процесса сопряженных между собой и несущих жесткую двух свай существенно зависит от разности глубины их заложения в грунтовую среду. В случае сохранения глубины заложения одного и снижения другого свая приводит к росту амплитуды колебания жестко связанного со сваями массивной недеформируемой балки (плиты) (рис.6).

Анализ результатов расчетов прогибов и напряжений показывает, что характер распределения прогибов по длине двух свай с разными глубинами существенно отличаются друг от друга. Причем, для сваи с большей глубиной заложения, ее прогибы вблизи контакта с основанием достигают максимального значения, прогибы для другой сваи снижение прогибов по длине непрерывно уменьшается (рис.7). Из анализа законов распределения напряжений по длине свай (рис.8), следует, что максимальные значения

напряжений возникают в нижних сечениях свай, причем их наибольшие значения достигаются в свае с большей глубиной заложения в грунтовую среду.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] O'Rourke M. Wave Propagation Damage to Continuous Pipe // TCLEE 2009. Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 2009, Vol. 5, pp. 382–392.
- [2] O'Rourke T.D., Jeon S.S., Toprak S., Cubrinovski M., Hughes M., Van Ballegooy S., Bouziou D. Earthquake response of underground pipeline networks in Christchurch, NZ // Earthq. Spectra. 2014, Vol. 30, pp. 183–204.
- [3] Esposito S., Giovinazzi S., Elefante L., Iervolino I. Performance of the L'Aquila (central Italy) gas distribution network in the 2009 (M_w 6.3) earthquake // Bull. Earthq. Eng. 20136 Vol. 11, No. 6, pp. 2447–2466.
- [4] Berdibaev M. et al. Beam vibration due movement of overweight cargoes on reinforced concrete bridges at different ground conditions // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 401, P. 01075.
- [5] Сергеев А.А. Методика экспериментальной оценки динамических воздействий подвижной нагрузки на пролетные строения автодорожных мостов: Дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Москва. 2007. 197 с.
- [6] An E. V., Rashidov T.R. Seismodynamics of underground pipelines interacting with water-saturated fine-grained soil // Mech. Solids. 2015. Vol. 50, No. 3, pp. 305–317.
- [7] Mardonov B.M., Mirzaev I., Hojmetov G.H., An E.V. Theoretical values of the interaction parameters of the underground pipeline with the soil // AIP Conference Proceedings. 2022, P. 030009.
- [8] Мардонов Б.М., Нишоннов Н.А., Бердибаев М.Ж. Расчет двухпролетного автодорожного балочного моста на воздействие сейсмической волны // Проблемы механики. 2021, №4. стр.3-12.
- [9] Гринев С.Ю. Развитие теории динамического расчета автодорожных мостов на подвижную нагрузку: Дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Воронеж. 2013. 370 с.
- [10] Соломенцев М.Е. Методика динамической диагностики типовых балочных железобетонных пролетных строений автодорожных мостов: Дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Москва. 2011. 143 с.
- [11] Хазанов М.Л. Оценка влияния резонансных явлений от подвижной нагрузки на пролетные строения мостовых конструкций / Исследование мостовых и тоннельных сооружений: Сборник научных трудов МАДИ (ГТУ), 2006.
- [12] Мардонов Б.М., Бекмирзаев Д.А., Нишоннов Н.А., Бердибаев М.Ж., Ботабаев Н.И. Колебания балки железобетонных мостов, взаимодействующих с грунтовыми опорами при действии подвижных сверхнормативных грузов // Проблемы механики. 2023, №2. стр. 56-63.
- [13] Kahya V. Dynamic analysis of pre-stressed elastic beams under moving mass using different beam models // Challenge Journal of Structural Mechanics. 2015, No.1 (3), pp. 106-116.
- [14] Mardonov B., Bekmirzaev D., Berdibaev M., Khurramov A., Botabaev N. Assessment of Vibrations of Superstructures of Reinforced Concrete Bridges Under the Influence of Mobile Loads. AIP Conf. Proc. 2025, Vol. 3265, P. 050037.
- [15] Khurramov A. Diagnostics of the seismic state of bridges, where pile foundations are located in pairs // Universum: technical sciences: electron. scientific journal. 2024, Vol. 119, No. 2, pp. 62-68.
- [16] Berdibaev M., Mardonov B., Khurramov A. Vibrations of a Girder on Rigid Supports of Finite Mass Interacting With Soil under Seismic Loads // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2021, Vol. 264, P. 02038.
- [17] Mirzakhmedov M., Yuvmitov A., Khurramov A. Studies on truss bridges // AIP Conference Proceedings. 2025, Vol. 3265, No. 1, P. 050039.

Дата поступления
17.05.2025

Mardonov B.M., Nishonov N.A., Berdibaev M.J., Xurramov A.Ch. Gruntning bo'lakli bir jinsli o'zaro ta'sir koeffitsienti, ikkita deformatsiyalanuvchan tayanchlarga (qoziq) o'rnatilgan bikir balka (plita)ning tebranishi.

Annotasiya. Zilzilalarda tayanchning holati avtomagistral ko'priklarning ekspluatatsiyasida katta rol o'ynaydi. Avtomagistral ko'priklari uchun, ayniqsa bo'ylama yo'nalishda tayanchlar seysmik kuchning asosiy qismini o'ziga qabul qiladi. Zilzilada ko'priklar konstruksiyasining samaradorligi, ko'priklar yeri yorig'ga yaqinligi va maydon grunt sharoitiga bog'liq. Bu ikki omil ham gruntning tebranish va deformatsiyalanish darajasiga hamda bu ta'sirlarning ko'priklar uzunligi bo'ylab o'zgaruvchanligiga ta'sir ko'rsatadi. Ushbu ishda asosning kinematik qo'zg'alishi ta'sirida qoziqlar ko'rinishidagi ko'priklar ikkita tayanchning kuchlanganlik holatiga yotqizish chuqurligining ta'siri masalalari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: qoziqlar, tayanch, avtomagistral ko'priklar, seysmik kuch, kinematik qo'zg'atish, yotqizish chuqurligi.

Mardonov B.M., Nishonov N.A., Berdibaev M.J., Khurramov A. Vibrations of a hard beam (plate) installed on two deformable supports (sways) with fracture smooth coefficients of the ground.

Abstract. The behavior of supports plays a significant role in the performance of highway bridges during earthquakes. For many highway bridges, the supports bear most of the seismic force, particularly in the longitudinal direction. The performance of the bridge structure during an earthquake likely depends on the bridge's proximity to the fault and the site conditions. Both of these factors influence the intensity of ground shaking and soil deformation, as well as the variability of these effects along the bridge length. This study examines the influence of foundation depths on the stress state of two bridge supports, in the form of piles, subjected to kinematic excitation of the base.

Keywords: piles, support, highway bridges, seismic force, kinematic excitation, foundation depth.

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Халджигитов А.А., Хасанова З.З., Тиловов О.У.

*Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
e-mail: khaldjigitov@gmail.com; zebohasanova436@gmail.com*

Аннотация. В работе, в рамках условий совместности деформаций Сен-Венана с учетом равенства нулю дивергенции тензора деформаций, выписано уравнение типа Бельтрами-Митчелла. Сформулирована краевая задача теории упругости в напряжениях, состоящая из уравнений равновесия и недиагональных уравнений типа Бельтрами-Митчелла с соответствующими граничными условиями. Конечно-разностным методом построены сеточные уравнения для плоской задачи теории упругости, решаемые методом последовательных приближений непосредственно относительно напряжений. Численно решены задачи о растяжении пластины параболической нагрузкой (задача Тимошенко-Гудьера), а также равномерно распределенной нагрузкой. Справедливость и достоверность сформулированных краевых задач и полученных результатов обоснована сравнением с известными численными результатами, а также проверкой удовлетворения уравнений равновесия.

Ключевые слова: условия Сен-Венана, дивергенция тензора деформаций, напряжения, уравнения Бельтрами-Митчелла, разностные схемы, итерационный метод.

Введение. Формулировка краевых задач теории упругости относительно напряжений является актуальной задачей механики сплошных сред. Впервые уравнения относительно напряжений в рамках условий Сен-Венана были предложены Бельтрами в 1892 году и Митчеллом в 1899 году с учетом объемных сил [1]. Известно, что классическая задача теории упругости в напряжениях состоит из шести уравнений Бельтрами-Митчелла и трех уравнений равновесия с тремя поверхностными граничными условиями [2]. Таким образом, количество уравнений является переопределенным и равно девяти, а граничные условия недостаточными и равны трем. Вопрос количества независимых уравнений Бельтрами-Митчелла и выбора недостающих трех граничных условий является предметом дискуссий в течение долгого времени [3-5]. В работах [6, 7] отмечено, что только три из шести уравнений Бельтрами-Митчелла являются независимыми. Согласно [8], количество независимых уравнений может быть снижено до трех с помощью условий Бяньки. В работе [9] предложены новые независимые уравнения, совпадающие в частном случае с уравнениями Бельтрами-Митчелла. При этом, в качестве недостающих граничных условий рассмотрены уравнения равновесия на границе заданной области [10]. В работе [11] показано, что для корректной постановки краевой задачи относительно напряжений достаточно рассмотреть три недиагональных уравнения Бельтрами-Митчелла, в сочетании с тремя уравнениями равновесия.

Обычно, плоские задачи в напряжениях сводятся к решению бигармонического уравнения относительно функций напряжений Эри [12].

Пространственная задача в напряжениях для параллелепипеда, используя вариационный принцип Кастильяно [13] и новый вариационный принцип, были рассмотрены в работах [13-16].

Задачи о равновесии параллелепипеда и прямоугольной пластины были сформулированы в [17, 18] непосредственно относительно напряжений и решены численно итерационным методом. Новый подход к решению термоупругих задач в напряжениях рассмотрен в [19]. Подробный обзор по этой тематике можно найти в работе [20].

В [21] уравнения в напряжениях, предложенные в [22], обобщены для трансверсально изотропных тел. Работа [23] посвящена численному решению задачи об ортотропной балке с введением функций напряжений Эри в виде полинома, и методом конечных объемов. В [24] упругие и термоупругие задачи для ортотропной полуплоскости решены с применением преобразования Фурье.

Настоящая работа посвящена разработке уравнений типа Бельтрами-Митчелла, и численному решению плоских задач теории упругости относительно напряжений, а также обоснованию справедливости и достоверности предложенных уравнений.

Об условиях совместности деформаций Сен-Венана. Известно, что условие совместности Сен-Венана является условием однозначного решения соотношений Коши относительно перемещений и имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2\varepsilon_{12,12}, \\ \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} &= 2\varepsilon_{13,13}, \\ \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 2\varepsilon_{23,23}, \\ \varepsilon_{11,23} &= (\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1})_{,1}, \\ \varepsilon_{22,13} &= (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{31,2})_{,2}, \\ \varepsilon_{33,12} &= (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{12,3})_{,3}.\end{aligned}\tag{1}$$

Складывая первые два соотношения условий Сен-Венана, и прибавляя к полученному выражению $2\varepsilon_{11,11} - 2\varepsilon_{11,11}$, после некоторых преобразований можно найти, что

$$\nabla^2 \varepsilon_{11} + \theta_{,11} - 2(\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{12,2} + \varepsilon_{13,3})_{,1} = 0.\tag{2}$$

Аналогичным образом, складывая попарно первую группу уравнений (1), могут быть найдены следующие выражения:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varepsilon_{22} + \theta_{,22} - 2(\varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{22,2} + \varepsilon_{23,3})_{,2} &= 0, \\ \nabla^2 \varepsilon_{33} + \theta_{,33} - 2(\varepsilon_{31,1} + \varepsilon_{32,2} + \varepsilon_{33,3})_{,3} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Прибавляя следующее выражение в правую часть соотношения (1)₆

$$\varepsilon_{11,12} - \varepsilon_{11,12} + \varepsilon_{22,12} - \varepsilon_{22,12} + \varepsilon_{12,22} - \varepsilon_{12,22} + \varepsilon_{12,11} - \varepsilon_{12,11},\tag{4}$$

после некоторых преобразований, его можно привести к виду

$$\nabla^2 \varepsilon_{12} + \theta_{,12} - (\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{12,2} + \varepsilon_{13,3})_{,2} - (\varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{22,2} + \varepsilon_{23,3})_{,1} = 0.\tag{5}$$

Аналогичным образом, из (1)_{4,5} могут быть найдены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varepsilon_{13} + \theta_{,13} - (\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{12,2} + \varepsilon_{13,3})_{,3} - (\varepsilon_{31,1} + \varepsilon_{32,2} + \varepsilon_{33,3})_{,1} &= 0, \\ \nabla^2 \varepsilon_{23} + \theta_{,23} - (\varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{22,2} + \varepsilon_{23,3})_{,3} - (\varepsilon_{31,1} + \varepsilon_{32,2} + \varepsilon_{33,3})_{,2} &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Соотношения (2, 3) и (5, 6) могут быть записаны единой формулой, в виде условий совместности деформаций Сен-Венана [2], т.е.

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - (\varepsilon_{ik,k})_{,j} - (\varepsilon_{jk,k})_{,i} = 0.\tag{7}$$

Условимся в дальнейшем, если в слагаемом встречается какой-нибудь индекс дважды будем считать, что происходит суммирование по этому индексу от 1 до 3. Нетрудно заметить, что в соотношениях (7) или (2, 3, 5, 6) важную роль играет дивергенция тензора деформации $\varepsilon_{ik,k}$. Можно показать, что если дивергенция тензора деформации равна нулю, т.е.

$$\varepsilon_{ij,j} = \text{div } \varepsilon = 0,\tag{8}$$

то условия совместности деформаций Сен-Венана (7) выполняются тождественно. Равенство нулю дивергенции тензора деформаций при условиях совместности деформаций отмечено в работе Победри [10]. Можно показать, что при выполнении условия (8), следующее соотношение равно нулю

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} = 0.\tag{9}$$

Для чего условия (8) расписываем в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{12,2} + \varepsilon_{13,3} &= 0, \\ \varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{22,2} + \varepsilon_{23,3} &= 0, \\ \varepsilon_{31,1} + \varepsilon_{32,2} + \varepsilon_{33,3} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Дифференцируя (10)₁ по x_1 и подставляя в него $\varepsilon_{12,12}$ и $\varepsilon_{13,13}$ из первых двух условий Сен-Венана (1)_{1,2} и умножая полученное на 2, может быть найдено следующее выражение:

$$2\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} = (\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{11,33}) + (\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{33,11}) = 0, \quad (11)$$

или

$$\nabla^2 \varepsilon_{11} + \theta_{,11} = 0, \quad (12)$$

которое равносильно соотношению (9) при $i=1, j=1$. Аналогично, из (10)_{2,3} и (1) могут быть найдены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varepsilon_{22} + \theta_{,22} &= 0, \\ \nabla^2 \varepsilon_{33} + \theta_{,33} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя (6)₁ по x_2 и (6)₂ по x_1 и складывая их, затем прибавляя к полученному выражению $\varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{12,33}$ и с учетом (1)₆, можно найти, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,12} + \varepsilon_{12,22} + \varepsilon_{13,32} + \varepsilon_{21,11} + \varepsilon_{22,21} + \varepsilon_{23,31} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{12,33} = \\ (\varepsilon_{12,22} + \varepsilon_{21,11} + \varepsilon_{12,33}) + \varepsilon_{11,12} + \varepsilon_{22,12} + (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{12,3})_{,3} = \\ (\varepsilon_{12,11} + \varepsilon_{12,22} + \varepsilon_{12,33}) + \varepsilon_{11,12} + \varepsilon_{22,12} + \varepsilon_{33,12} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

что равносильно уравнению (9) при $i=1, j=2$

$$\nabla^2 \varepsilon_{12} + \theta_{,12} = 0, \quad (15)$$

Аналогично могут быть найдены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varepsilon_{13} + \theta_{,13} &= 0, \\ \nabla^2 \varepsilon_{23} + \theta_{,23} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом мы показали, что если дивергенция тензора деформаций (8) равна нулю, тогда соотношение (9) также равно нулю и условия Сен-Венана (7) удовлетворяются тождественно.

Поэтому соотношения (8) и (9) могут рассматриваться как другая форма записи условий совместности деформаций. С другой стороны, условия (8) представляют собой три связи между шестью условиями Сен-Венана, т.е. указывают на зависимость этих условий. Поэтому, при формулировке краевых задач достаточно взять три из шести соотношений (7) или (9) в сочетании с уравнениями равновесия. При использовании первых трех диагональных уравнений, удобно ввести дополнительные функции Эри, Максвелла и Мореры, удовлетворяющие уравнения равновесия. Если рассмотреть вторую группу недиагональных уравнений, тогда краевую задачу можно будет сформулировать непосредственно относительно компонентов тензора напряжений.

Уравнения типа Бельтрами-Митчелла. Известно, что условие совместности Сен-Венана (7) с помощью закона Гука и уравнения равновесия может быть представлено в виде уравнений Бельтрами-Митчелла [1]

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij}, \quad S = \sigma_{k,k}. \quad (17)$$

При отсутствии объемных сил уравнения Бельтрами-Митчелла имеют вид

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = 0, \quad S = \sigma_{k,k}. \quad (18)$$

Теперь с помощью соотношений (9) покажем, что может быть найдено другое уравнение типа Бельтрами-Митчелла (18). Для чего рассмотрим закон Гука относительно технических постоянных

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (9), найдем:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \nabla^2 \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = 0, \quad (20)$$

Умножая последнее уравнение на δ_{ij} , можно получить $\nabla^2 \sigma_{kk} = 0$. Тогда уравнение (18) принимает вид

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} S_{,ij} = 0, \quad S = \sigma_{kk}. \quad (21)$$

Последнее уравнение будем называть уравнением типа Бельтрами-Митчелла, так как оно отличается от (18) только коэффициентом перед вторым слагаемым.

Заметим, что уравнения (21) были найдены из соотношения (9) с помощью закона Гука. А классические уравнения Бельтрами-Митчелла, в отличие от (21), получены из условий совместности деформаций с помощью закона Гука и уравнений равновесия, и из-за этого коэффициенты в уравнениях (18) и (21) отличаются друг от друга.

Следуя работам [17, 18], сформулируем краевую задачу в напряжениях, для чего к недиагональным $i \neq j$ уравнениям (18) присоединим три уравнения равновесия, т.е.

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} S_{,ij} = 0, \quad i \neq j \quad (22)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (23)$$

При этом граничные и дополнительные граничные условия имеют вид [15, 16], соответственно:

$$\sigma_{ij,n} j \Big|_{\Sigma_2} = S_i, \quad (24)$$

$$\sigma_{ij,j} \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (25)$$

Таким образом система из шести уравнений (22-23) с шестью граничными условиями (24,25) представляет собой замкнутую краевую задачу теории упругости в напряжениях.

Плоские задачи теории упругости в напряжениях без использования функций напряжений Эри. В литературе общеизвестно, что плоские задачи в теории упругости обычно, с введением функций напряжений Эри, удовлетворяющих уравнения равновесия, приводятся к решению бигармонического уравнения. Краевая задача (22-25), сформулированная непосредственно относительно напряжений, в случае плоского напряженного состояния, может быть сведена к системе уравнений, состоящей из двух уравнений равновесия (при отсутствии объемных сил) и одного уравнения (18) при $i=1, j=2$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (27)$$

с граничными и дополнительными граничными условиями

$$(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_1, \quad (28)$$

$$(\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2.$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, уравнения (26-29) представляют плоскую краевую задачу теории упругости в напряжениях (**Задача А**).

Следуя работе [18], в краевой задаче А, уравнения равновесия могут быть использованы в продифференцированном виде, т.е.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial y \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial y^2} &= 0,\end{aligned}\quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (31)$$

Получим другую формулировку плоской задачи (**Задача С**).

Разностные уравнения относительно напряжений для плоских задач А и С. Плоские краевые задачи А и С рассмотрим в прямоугольной области $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ и, заменим ее сеточной областью с узлами $\{x_i = ih_1, y_j = jh_2\}$, где $i = \overline{0, n_1}$, $j = \overline{0, n_2}$, $h_k = l_k / N_k$, $k = 1, 2$ [26]. Для уравнений (26-29) могут быть построены следующие разностные уравнения:

$$\frac{\sigma_{i+1,j}^{11} - \sigma_{ij}^{11}}{h_1} + \frac{\sigma_{i,j+1}^{12} - \sigma_{i,j-1}^{12}}{2h_2} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\sigma_{i,j+1}^{22} - \sigma_{ij}^{22}}{h_2} + \frac{\sigma_{i+1,j}^{12} - \sigma_{i-1,j}^{12}}{2h_1} = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}& \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{11} - \sigma_{i+1,j-1}^{11} - \sigma_{i-1,j+1}^{11} + \sigma_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \frac{\sigma_{i+1,j}^{12} - 2\sigma_{i,j}^{12} + \sigma_{i-1,j}^{12}}{h_1^2} \\ & + \frac{\sigma_{i,j+1}^{12} - 2\sigma_{i,j}^{12} + \sigma_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} + \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{22} - \sigma_{i+1,j-1}^{22} - \sigma_{i-1,j+1}^{22} + \sigma_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} = 0.\end{aligned} \quad (34)$$

Разрешая уравнения (32-34) относительно σ_{ij}^{11} , σ_{ij}^{22} , σ_{ij}^{12} , может быть организован следующий итерационный процесс (**Задача А**):

$$\sigma_{11ij}^{(k+1)} = \sigma_{11i+1,j}^{(k)} + h_1 \frac{\sigma_{12i,j+1}^{(k)} - \sigma_{12i,j-1}^{(k)}}{2h_2}, \quad (35)$$

$$\sigma_{22ij}^{(k+1)} = \sigma_{22i,j+1}^{(k)} + h_2 \frac{\sigma_{12i+1,j}^{(k)} - \sigma_{12i-1,j}^{(k)}}{2h_1}, \quad (36)$$

$$\sigma_{12i,j}^{(k+1)} = \left[\frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\sigma_{11i+1,j+1}^{(k)} - \sigma_{11i+1,j-1}^{(k)} - \sigma_{11i-1,j+1}^{(k)} + \sigma_{11i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} + \frac{\sigma_{12i+1,j}^{(k)} + \sigma_{12i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12i,j+1}^{(k)} + \sigma_{12i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\sigma_{22i+1,j+1}^{(k)} - \sigma_{22i+1,j-1}^{(k)} - \sigma_{22i-1,j+1}^{(k)} + \sigma_{22i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \right] / \left(\frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \right). \quad (37)$$

где k – номер итерации.

В уравнении равновесия (26), заменяя первые слагаемые левой и правой конечной разностью, аналогично (32) могут быть найдены следующие соотношения:

$$\sigma_{ij}^{11} = \frac{\sigma_{i+1,j}^{11} + \sigma_{i-1,j}^{11}}{2}, \quad (38)$$

$$\sigma_{ij}^{22} = \frac{\sigma_{i,j+1}^{22} + \sigma_{i,j-1}^{22}}{2}. \quad (39)$$

В сочетании с разностным уравнением (34), они могут рассматриваться как альтернативная система разностных уравнений, которую будем обозначать как **задача В**.

Если вместо уравнений (35) и (36), рассмотреть разностные аналоги продифференцированных уравнений равновесия (30), и разрешить их относительно $\sigma_{ij}^{11}, \sigma_{ij}^{22}$, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{11i,j}^{(k+1)} &= \left[\frac{\sigma_{11i+1,j}^{(k)} + \sigma_{11i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{12i+1,j+1}^{(k)} - \sigma_{12i+1,j-1}^{(k)} - \sigma_{12i-1,j+1}^{(k)} + \sigma_{12i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \right] / \frac{2}{h_1^2}, \\ \sigma_{22i,j}^{(k+1)} &= \left[\frac{\sigma_{22i,j+1}^{(k)} + \sigma_{22i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + \frac{\sigma_{12i+1,j+1}^{(k)} - \sigma_{12i+1,j-1}^{(k)} - \sigma_{12i-1,j+1}^{(k)} + \sigma_{12i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \right] / \frac{2}{h_2^2},\end{aligned}\quad (40)$$

то получим другую систему уравнений, обозначаемую как **задача С**. Сеточный аналог граничных условий (28-29) для прямоугольной пластины размера (2а, 2b) имеет вид:

при $x = \mp a$:

при $y = \mp b$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11\ 0j}^{(0)} &= S, & \sigma_{12\ 0j}^{(0)} &= 0, & \sigma_{22\ i0}^{(0)} &= 0, & \sigma_{12\ i0}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_{11\ N_1j}^{(0)} &= S, & \sigma_{12\ N_1j}^{(0)} &= 0, & \sigma_{22\ iN_2}^{(0)} &= 0, & \sigma_{12\ iN_2}^{(0)} &= 0.\end{aligned}\quad (41)$$

при $x = \mp a$:

при $y = \mp b$:

$$\begin{aligned}\sigma_{22\ 0j}^{(0)} &= \sigma_{22\ 0,j+1}^{(0)} + h_2 \frac{\sigma_{12\ 1j}^{(0)} - \sigma_{12\ 0j}^{(0)}}{h_1}, & \sigma_{11\ i0}^{(0)} &= \sigma_{11\ i+1,0}^{(0)} + h_1 \frac{\sigma_{12\ i1}^{(0)} - \sigma_{12\ i0}^{(0)}}{h_2}, \\ \sigma_{22\ n_1j}^{(0)} &= \sigma_{22\ n_1,j+1}^{(0)} + h_2 \frac{\sigma_{12\ n_1j}^{(0)} - \sigma_{12\ n_1-1,j}^{(0)}}{h_1}, & \sigma_{11\ in_2}^{(0)} &= \sigma_{11\ i+1,n_2}^{(0)} + h_1 \frac{\sigma_{12\ in_2}^{(0)} - \sigma_{12\ i,n_2-1}^{(0)}}{h_2}.\end{aligned}\quad (42)$$

Таким образом, для плоской задачи в напряжениях построены три вида конечно-разностных уравнений, а именно А(35-37), В(38-40) и С(37,40) с граничными условиями (41, 42). Конечно-разностные уравнения удобны для решения методом последовательных приближений [26].

Численные примеры. Рассмотрим задачу о растяжении прямоугольной пластины размером $l_1=2a$, $l_2=2b$. При этом граничные условия имеют вид

$$\text{при } x = \pm a: \sigma_{11} = S, \quad \sigma_{12} = 0. \quad \text{при } y = \pm b: \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (43)$$

Упругие постоянные имеют следующие значения [22]:

$$\lambda = 0.78, \quad \mu = 0.5, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad h_1 = h_2 = 0.2. \quad (44)$$

1. Пусть пластина растягивается параболической нагрузкой $S=S_0(1-y^2/b^2)$, приложенной по двум противоположным сторонам прямоугольника (Рис.1). В таблице 1 приведены значения напряжений σ_{11} в середине пластины ($x=0$), найденные по численному решению краевых задач А, В и С.

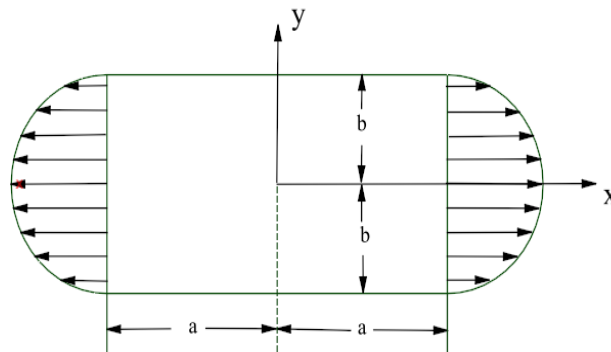


Рис. 1. Прямоугольная пластина под действием параболической нагрузки.

Таблица 1

Значения напряжений σ_{11} в середине пластины, найденные по численному решению краевых задач А, В и С

$x=0$	$y=1$	$y=0.8$	$y=0.6$	$y=0.4$	$y=0.2$	$y=0$
Задача А	0.0000	0.3600	0.6400	0.8400	0.9600	1.0000
Задача В	0.0000	0.3589	0.6380	0.8374	0.9570	0.9969
Задача С	0.0000	0.3605	0.6382	0.8365	0.9556	0.9953
Тимошенко [12]	0.0000	0.3591	0.6374	0.8372	0.9567	0.9966

В таблицах 2 и 3 приведены погрешности уравнений равновесия R_1 , R_2 , соответственно вычисленные по численным результатам краевых задач А, В и С. Как видно из этих таблиц, уравнения равновесия R_1 , R_2 удовлетворяются, т.е. погрешность близка к нулю, что означает правильность полученных численных результатов, а также справедливость предположенных уравнений типа Бельтрами-Митчелла для изотропных тел.

$$R_1 = \frac{\sigma_{i+1,j}^{11} - \sigma_{i-1,j}^{11}}{2h_1} + \frac{\sigma_{i,j+1}^{12} - \sigma_{i,j-1}^{12}}{2h_2}, \quad (45)$$

$$R_2 = \frac{\sigma_{i,j+1}^{22} - \sigma_{i,j-1}^{22}}{2h_2} + \frac{\sigma_{i+1,j}^{12} - \sigma_{i-1,j}^{12}}{2h_1},$$

Таблица 2

Значения уравнения равновесия R_1 для задач А, В, С.

$x=0$	$y=1$	$y=0.8$	$y=0.6$	$y=0.4$	$y=0.2$	$y=0$
Задача А	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача В	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача С	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 3

Значения уравнения равновесия R_2 для задач А, В, С.

$x=0$	$y=1$	$y=0.8$	$y=0.6$	$y=0.4$	$y=0.2$	$y=0$
Задача А	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача В	0.0000	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000
Задача С	0.0000	0.0006	0.0002	0.0001	0.0002	0.0003

2. Теперь рассмотрим прямоугольную пластину (рис.1), растягиваемую с противоположных сторон равномерно распределенной нагрузкой $S=1$. Пусть исходные данные будут такими же, как в предыдущей задаче. Расчетные значения напряжения σ_{11} , полученные по численному решению краевых задач А, В, С, показаны в таблице 4 и они равны приложенной нагрузке, что означает справедливость полученных результатов. В таблицах 5 и 6 показаны погрешности аппроксимации уравнений равновесия R_1 , R_2 , вычисленные по численным результатам краевых задач А, В и С.

Таблица 4

Значения напряжения σ_{11}

$y=0$	$x=1$	$x=0.8$	$x=0.6$	$x=0.4$	$x=0.2$	$x=0$
Задача А	1	1	1	1	1	1
Задача В	1	0.9969	0.9969	0.9969	0.9969	0.9969
Задача С	1	0.9976	0.9964	0.9963	0.9964	0.9964

Таблица 5

Значения уравнения равновесия R_1 для задач А, В и С.

$x=0$	$y=1$	$y=0.8$	$y=0.6$	$y=0.4$	$y=0.2$	$y=0$
Задача А	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача В	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача С	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 6

Значения уравнения равновесия R_2 для задач А, В и С.

$x=0$	$y=1$	$y=0.8$	$y=0.6$	$y=0.4$	$y=0.2$	$y=0$
Задача А	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Задача В	0.0000	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
Задача С	0.0000	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001

Заключение. В работе, в рамках условия совместности деформаций Сен-Венана получены следующие научные результаты:

- предложены новые уравнения типа Бельтрами-Митчелла для изотропных тел;
- сформулирована краевая задача теории упругости в напряжениях, состоящая из трех недиагональных уравнений в сочетании с уравнениями равновесия;
- построены симметричные конечно-разностные уравнения, которые решены методом последовательных приближений;
- решены задачи о растяжении прямоугольной пластины параболической и равномерно распределенной нагрузкой;
- сравнением с известными численными результатами, а также проверкой выполнения уравнений равновесия, обоснована справедливость и достоверность предложенных уравнений типа Бельтрами-Митчелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Novatsky V. The Theory of Elasticity. M.: Mir, 1975, 872 p.
2. Pobedrya B.E. New formulation of the problem of mechanics of a deformable rigid body in stresses // Report of the Academy of Sciences of the USSR. 1980, Vol. 253, No. 2, pp. 295-297.
3. Andrianov I., Topol H. Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions // Mechanics and Physics of Structured Media. Elsevier, 2022. pp. 123-140.
4. Lubarda M. V., Lubarda V.A. A note on the compatibility equations for three-dimensional axisymmetric problems // Math. Mech. Solids. 2020, Vol. 25, No. 2, pp. 160-165.
5. Lurie S.A., Belov P.A. Compatibility equations and stress functions in elasticity theory // Mech. Solids. 2022, Vol. 57, No.4, pp. 779-791.
6. Washizu K. A. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 3rd edition, 1982, 532 p.
7. Borodachev N.M. Stress solutions to the three-dimensional problem of elasticity // Int. Appl. Mech. 2006, Vol. 42, No. 8, pp. 849-878.
8. Sadd M. Introduction to Linear Elasticity, Academic Press 4th ed., 2020, 473 p.
9. Pobedrya B.E., Sheshenin S.V., Kholmato T. The problem in terms of a stress tensor. Fan, Tashkent, 1988, 200 p.
10. Pobedrya. B.E. Numerical Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity. M.: Moscow State University, 1996, 343 p.
11. Khaldjigitov A., Djumayozov U., Tilovov O. A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains // EUREKA Phys. Eng. 2023, No. 2, pp. 160-173.
12. Timoshenko S., Goodier J.N. Theory of Elasticity. Boston, McGraw-Hill, 1970, 560 p.
13. Filonenko-Borodich M. Theory of Elasticity. University Press of the Pacific, 2003, 396 p.
14. Muravleva L. V. Candidate's Dissertation in Mathematical Physics, MGU, Moscow, 1986.
15. Li. S., Gupta A, Markenscoff X. Conservation Laws of Linear Elasticity in Stress Formulations // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2005, Vol. 461, No. 2053, pp. 99-116
16. Kucher, V. A., Markenscoff, X., Paukshto, M. V. Some Properties of the Boundary Value Problem of Linear Elasticity in Terms of Stresses // Journal of Elasticity. 2004, Vol. 74, No. 2, pp. 135-145.
17. Khaldjigitov A., Tilovov O., Djumayozov U. Numerical solution of problem of equilibrium of parallelepiped in stresses // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 401. pp. 02019.
18. Khaldjigitov A.A., Tilovov O.U., Salomov N.O. On the numerical solution of plane problems of elasticity theory in stresses // XIII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, St. Petersburg. 2023, pp. 120-122
19. Khaldjigitov A., Tilovov O., Khasanova Z. A new approach to problems of thermoelasticity in stresses // Journal of Thermal Stresses. 2024, pp. 1228-1241
20. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. Compatibility Equations in the Theory of Elasticity // J. Vib. Acoust. 2003, Vol. 125, No. 2, pp. 244-245.
21. Pobedrya B.Y. The problem in terms of a stress tensor for an anisotropic medium // J. Appl. Math. Mech. 1994, Vol. 58, No. 1, pp. 81-89.
22. Pobedrya B.E. Static problem in a stresses // Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekhanika. 2003, No. 3, pp. 61-67.
23. Rebello M.A., Zdanski P.S.B., Vaz M. Considerations on alternative solutions for stress analysis of anisotropic materials: a beam case study // Contin. Mech. Thermodyn. 2021. Vol. 33, No. 5, pp. 2123-2140.
24. Tokovyy Y.V., Yasinsky A.V., Lubowicki S. and Perkowski D.M. Elastic and Thermoelastic Responses of Orthotropic Half-Planes // Materials (Basel). 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 297.
25. Lekhnitskii, S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, San Francisco, 1963, 431 p.
26. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Methods for Solving Grid Equations. Moscow: «Nauka», 1978, 592 p.

Дата поступления
24.04.2025

Xaldjigitov A.A., Xasanova Z.Z., Tilovov O.O'. Elaskilik nazariyasining kuchlanishlarga nisbatan masalalari.

Annotasiya. Ushbu maqolada Sen-Venanning deformatsiyalarning birgalikda bo'lish shartlari doirasida, deformatsiya tenzori divergensiyasining nolga tengligini hisobga olgan holda, Beltrami-Michell tipidagi tenglamalar taklif etilgan. Muvozanat tenglamalari va Beltrami-Michel tipidagi nodiagonal tenglamalar va mos chegaraviy shartlardan tashkil topgan elastiklik nazariyasining kuchlanishlarga nisbatan chegaraviy masalasi qo'yilgan. Elastiklik nazariyasining tekis masalasi uchun, ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida echiladigan, chekli ayirmali to'r tenglamalar tuzilgan. Parabolik kuch (Timoshenko-Gudier masalasi) va tekis taqsimlangan kuch ostida bo'lgan plastinkani cho'zish masalalari sonli yechilgan. Ma'lum sonli natijalar bilan solishtirish, shuningdek, muvozanat tenglamalarining qanoatlantirilishini tekshirish orqali qo'yilgan chegaraviy masalalarning xamda olingan natijalarning o'rinitiligi va ishonchliligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Sen-Venan shartlari, deformatsiya tenzori divergansiyasi, kuchlanish, Beltrami-Michell tenglamalari, chekli ayirmali sxemalar, iteratsion usul.

Khaldjigitov A., Khasanova Z., Tilovov O. Problems of the Theory of Elasticity in Stresses.

Abstract. In this article, within the framework of Saint-Venant's compatibility equations, we derive Beltrami-Michell-type equations by considering the condition that the divergence of the strain tensor is zero. We formulate a boundary value problem of elasticity theory in stresses, which consists of equilibrium equations and non-diagonal Beltrami-Michell type equations with corresponding boundary conditions. The finite-difference method is employed to construct grid equations for a plane elasticity theory problem, which is solved directly for stresses using the iteration method. This includes solving the problem of stretching a plate under a parabolic force (the Timoshenko-Goodier problem) and uniformly distributed forces. The suitability and reliability of the formulated boundary value problems, as well as the results obtained, are validated by comparing them with known outcomes and verifying the satisfaction of the equilibrium equations.

Keywords: Saint-Venant conditions, divergence of the strain tensor, stress, Beltrami-Michell equations, difference schemes, iterative method.

УДК 532

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТИРОВКИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПО РЕЛЬЕФНОМУ ТРУБОПРОВОДУ

Хожикүлов Ш.Ш., Хужаев И.К., Бахтиёрв Б.Б.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук

Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: xojikulovshaxzod@mail.ru

Аннотация. В рамках квазиодномерных уравнений Н.Е. Жуковского сформулирована и решена задача о переходных процессах в элементарном участке трубопровода при временном изменении граничных скоростей течения несжимаемой жидкости, в котором дополнительно учтен фактор путевого изменения нивелирной высоты оси трубопровода от расстояния. Для усреднённой по сечению скорости потока получено неполное телеграфное уравнение, решение которого осуществлено методом разделения переменных. Значение давления определено путем интегрирования исходной системы уравнений с подстановкой найденного решения для скорости при заданном начальном значении давления на входе в участок. Представлены численные расчёты для случая постоянных величин начальных и граничных условий. Анализируются различные сценарии изменения скорости и давления по горизонтальному участку при постоянстве, монотонном росте и убывании массы жидкости. Особое внимание уделено характеристикам ударных волн, моделируемых с учетом и без учета влияния сил трения.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, трубопровод, квазиодномерная модель, метод Фурье, сила сопротивления, гравитация, вычислительный эксперимент.

Введение. В инженерной практике гидравлический расчет трубопроводов и их сети проводится согласно показателям стационарного потока вдали от возмущенных зон [1]. В связи с этим узкие места сети трубопроводов проявляются при рассмотрении нестационарных задач. Типичным примером нестационарных задач является задача о переходных процессах. Переход из одного режимного состояния к другому обычно сопровождается явлениями, которые требуют одновременного учета двух масштабов скорости: гидродинамической скорости и скорости распространения малых возмущений в системе труба–транспортируемая среда.

Образование и распространение волн возмущения в трубопроводах изучаются в рамках уравнений Н.Е. Жуковского [2, 3]. Им впервые построена система квазиодномерных уравнений, которые одновременно учитывают гидродинамическую скорость текучей среды и скорость распространения малых возмущений в системе среда–трубопровод, также им

проведены теоретические и экспериментальные исследования по распространению волн уплотнения и разряжения в трубопроводах.

Развитие и широкое практическое применение сети трубопроводов непосредственно связаны с теоретическими исследованиями. Разработаны различные линейные и нелинейные, полные и упрощенные математические модели трубопроводной транспортировки мало- и сверхсжимаемых сред [4] и гидродинамических смесей в рамках ньютоновских и неньютоновских сред [5]. Развивались аналитические [6, 7], численные [8, 9] и приближенные способы решения задач для сети и ее отдельных участков с учетом или без учета отдельных силовых и энергетических факторов.

Задачи о распространении волн уплотнения и разряжения представляют особый интерес для науки и практики. Многократные повторения таких волн приводят к потере целостности трубопровода. Приведем два примера, которые демонстрируют разрушительные последствия повторений чередования волн уплотнения и разряжения.

Силовые установки трубопроводов (насосы, компрессоры) работают в определенном интервале входных давлений и расхода среды. Меньшие их значения приводят к явлению помпажа: образуется сильный колебательный процесс в транспортируемой среде. Далее эти вибрации передаются корпусу трубопровода и нагнетателя. Совпадение собственных частот корпуса и транспортируемой среды приводит к резонансному случаю, что в конечном итоге выводит из строя нагнетатели и трубопроводы.

Пуск и остановка агрегатов насосных станций сопровождаются образованием волн возмущений давления в больших, разрушительных интервалах [10].

В целом, изучение особенностей образования и распространения ударных волн представляет большой интерес. Трудность процесса изучения ударных волн связана со скачками показателей. Это относится и к теоретическим исследованиям, и к стендовым исследованиям. В первом случае, это обусловлено использованием функции Хэвисайда [11] или же введением бегущих волн и разработкой адекватных численных методов [12, 13]. Во втором случае, это связано с разработкой и использованием менее инерционных систем измерения с поддержкой современных компьютерных технологий [14, 15].

Исходя из этих особенностей ударной волны и потребностей инженерной практики к исследованиям, ниже рассматривается элементарный рельефный участок трубопровода, на обоих концах которого заданы законы изменения скорости по времени. Начальные распределения скорости и ее производной по времени известны. Требуется решить задачу методом Фурье в рамках квазиодномерной модели Н.Е. Жуковского.

Предлагается общий вариант решения задачи с учетом силовых факторов по трению, гравитации и локальной составляющей силы инерции при переменных входных и выходных скоростях. Численные результаты получены для постоянных значений функций, фигурирующих в начальных и граничных условиях. В отличие от известных решений, здесь учитывается рельеф трассы прокладки трубопровода.

Математическая модель и решение задачи. Динамическое состояние жидкости на элементарном участке трубопровода при $\rho \approx const$ описывается следующими уравнениями [2, 16]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right), \\ -\frac{\partial P}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $P(x,t)=p(x,t)+\rho gy(x)$ – полное гидростатическое давление, представляющее меру потери энергии жидкости; $p(x,t)$, $w(x,t)$ – средние по сечению x значения давления и скорости потока в момент времени t ; $y(x)$ – нивелирная высота оси трубопровода; $a=\lambda w^*/4D$,

w^* – характерная скорость процесса – параметр осреднения; λ – коэффициент сопротивления трения; $c=(\rho_0/k+D\rho_0/E\delta)^{-1/2}$ – скорость распространения малых возмущений давления в системе труба-жидкость; ρ_0, D – плотность жидкости и диаметр трубопровода в невозмущенном состоянии; k, E – модули упругости транспортируемой жидкости и трубы; δ – толщина трубы [16].

Исключение полного напора $P(x,t)$ при постоянном значении площади поперечного сечения трубы $f=\pi D^2/4$ позволяет построить отдельное уравнение относительно скорости:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Это – неполное телеграфное уравнение [17, 16].

Рассматривается вариант начальных условий:

$$w(x, 0) = w^{(0)}(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = w^{(t)}(x).$$

Граничные условия заданы в виде

$$w(0, t) = \bar{w}(t), \quad w(l, t) = \tilde{w}(t).$$

Согласно этим данным и первому уравнению исходной системы, начальным условием для полного напора служит

$$P(x, 0) = p_{00} - \rho \int_0^x [w^{(t)}(\eta) + 2aw^{(0)}(\eta)] d\eta,$$

где p_{00} – начальное давление во входном сечении.

Если же второе условие задано в виде $P(x, 0) = p_0(x)$, то с привлечением первого уравнения исходной системы его можно преобразовать, т.е., два вида второго условия приводят к одинаковому результату.

Приведем граничные условия к однородному виду. Для этой цели вводится новая искомая функция $u(x, t)$ согласно зависимости

$$w(x, t) = C_0(t) + xC_1(t) + u(x, t).$$

Определены значения функций

$$C_0(t) = \bar{w}(t), \quad C_1(t) = \frac{\tilde{w}(t) - \bar{w}(t)}{l},$$

которые позволяют представить граничные условия в однородном виде:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

При этом само уравнение становится неоднородным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - H(t) - xR(t).$$

Оно решается при новых начальных условиях

$$u(x, 0) = w^{(0)}(x) - C_0(0) - C_1(0)x,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = w^{(t)}(x) - C'_0(0) - C'_1(0)x$$

и при известных уже однородных граничных условиях.

Здесь и далее пользуемся обозначениями

$$H(t) = C''_0(t) + 2aC'_0(t), \quad R(t) = C''_1(t) + 2aC'_1(t).$$

Приступим к решению уравнения относительно вспомогательной функции. Уравнения и краевые условия являются линейными. Это облегчает процесс решения задачи, и решение ищем в виде суммы суперпозиции двух решений [16, 17].

Первое слагаемое $U(x,t)$ является общим решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

при заданных граничных $U(0,t)=0$, $U(l,t)=0$ и начальных условиях

$$U(x,0) = w^{(0)}(x) - C_0(0) - C_1(0)x,$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = w^{(1)}(x) - C'_0(0) - C'_1(0)x.$$

Второе слагаемое $V(x,t)$ представляет частное решение неоднородного уравнения в соответствии с правой частью

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial V}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - H(t) - xR(t),$$

которое решается при нулевых начальных

$$V(x,0) = 0, \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0.$$

и однородных граничных условиях

$$V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0.$$

Сначала решается однородное уравнение.

Положим, что

$$U(x,t) = X(x)Y(t),$$

и приходим к уравнениям:

$$\frac{Y''(t) + 2aY'(t)}{c^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Задача Штурма-Лиувилля по координате x дает [16, 17, 18]

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \|X_n(x)\|^2 = \frac{l}{2}.$$

При этом для определения множителя в виде собственной функции от времени имеем уравнение

$$Y_n''(t) + 2aY_n'(t) + c^2\lambda_n^2 Y_n(t) = 0. \quad (2)$$

Подстановка выражения $Y_n(t) = e^{s_n t}$ в это уравнение приведет к характеристическому уравнению

$$s_n^2 + 2as_n + c^2\lambda_n^2 = 0.$$

Дискриминант данного уравнения составляет

$$D_n = a^2 - c^2\lambda_n^2,$$

а решением квадратного уравнения будет:

$$(s_n)_{1,2} = -a \pm \sqrt{D_n}.$$

При $D_n > 0$, когда два корня характеристического уравнения действительные и разные, решением дифференциального уравнения по $Y_n(t)$ будет [19]:

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= A'_n e^{-at+\sqrt{D_n}t} + B'_n e^{-at-\sqrt{D_n}t} = e^{-at} \left(A'_n e^{\sqrt{D_n}t} + B'_n e^{-\sqrt{D_n}t} \right) = \\ &= e^{-at} \left(\frac{A_n + B_n}{2} e^{\sqrt{D_n}t} + \frac{A_n - B_n}{2} e^{-\sqrt{D_n}t} \right) = e^{-at} \left(A_n ch\sqrt{D_n}t + B_n sh\sqrt{D_n}t \right). \end{aligned}$$

При $D_n = 0$, решения характеристического уравнения одинаковые (двукратный корень) и решением дифференциального уравнения по $Y_n(t)$ будет [19]:

$$Y_n(t) = e^{-at} (A_n + B_n t).$$

При $D_n < 0$, решения характеристического уравнения будут сопряженные комплексные: $(s_n)_{1,2} = -a \pm i\sqrt{|D_n|}$. Поэтому решением дифференциального уравнения по $Y_n(t)$ будет [20]

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= A'_n e^{-at+i\sqrt{|D_n|}t} + B'_n e^{-at-i\sqrt{|D_n|}t} = e^{-at} \left(A'_n e^{i\sqrt{|D_n|}t} + B'_n e^{-i\sqrt{|D_n|}t} \right) = \\ &= e^{-at} \left(\frac{A_n - iB_n}{2} e^{i\sqrt{|D_n|}t} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-i\sqrt{|D_n|}t} \right) = e^{-at} \left(A_n \operatorname{chi} \sqrt{|D_n|}t - iB_n \operatorname{shi} \sqrt{|D_n|}t \right) = \\ &= e^{-at} \left(A_n \cos \sqrt{|D_n|}t + B_n \sin \sqrt{|D_n|}t \right). \end{aligned}$$

С учетом этих возможных вариантов $D_n > 0$, $D_n = 0$ и $D_n < 0$, для $Y_n(t)$ получим решение:

$$Y_n(t) = \begin{cases} e^{-at} (A_n \operatorname{ch} \sqrt{D_n}t + B_n \operatorname{sh} \sqrt{D_n}t) & \text{при } D_n > 0, \\ e^{-at} (A_n + B_n t) & \text{при } D_n = 0, \\ e^{-at} (A_n \cos \sqrt{|D_n|}t + B_n \sin \sqrt{|D_n|}t) & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Соответственно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \lambda_n x.$$

Переходим к реализации граничных условий общего решения однородного уравнения.

Из первого начального условия (при $t=0$) следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = w^{(0)}(x) - C_0(0) - xC_1(0).$$

Умножим стороны этого уравнения на $\sin \lambda_m x dx$ и интегрируем от нуля до l . В результате получим

$$A_n \|X_n(x)\|^2 = W_n - C_0(0)S_n - C_1(0)K_n,$$

где

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^l w^{(0)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\ S_n &= \int_0^l \sin \lambda_n x dx = \frac{l}{n\pi} [1 - (-1)^n], \\ K_n &= \int_0^l x \sin \lambda_n x dx = \frac{l^2}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Определим

$$A_n = \frac{2}{l} [W_n - C_0(0)S_n - C_1(0)K_n].$$

Второе начальное условие связано с производной от функции $U(x, t)$ по времени при $t=0$.

Находим

$$Y'_n(t) = \begin{cases} e^{-at} \left[(-aB_n + \sqrt{D_n} A_n) sh \sqrt{D_n} t + (-aA_n + \sqrt{D_n} B_n) ch \sqrt{D_n} t \right] & \text{при } D_n > 0, \\ e^{-at} \left[-a(A_n + B_n t) + B_n \right] & \text{при } D_n = 0, \\ e^{-at} \left[(-aB_n - \sqrt{|D_n|} A_n) \sin \sqrt{|D_n|} t + (-aA_n + \sqrt{|D_n|} B_n) \cos \sqrt{|D_n|} t \right] & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Вычислим

$$Y'_n(0) = \begin{cases} -aA_n + \sqrt{D_n} B_n & \text{при } D_n > 0, \\ -aA_n + B_n & \text{при } D_n = 0, \\ -aA_n + \sqrt{|D_n|} B_n & \text{при } D_n < 0 \end{cases} = -aA_n + \gamma_n B_n,$$

$$\text{где } \gamma_n = \begin{cases} \sqrt{D_n} & \text{при } D_n > 0, \\ 1 & \text{при } D_n = 0, \\ \sqrt{|D_n|} & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Тогда второе начальное условие приобретает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-aA_n + \gamma_n B_n) \sin \lambda_n x = w^{(t)}(x) - C'_0(0) - xC'_1(0).$$

Применение ортонормированности собственных функций по x , при $W_n^{(t)} = \int_0^t w^{(t)}(\eta) \sin \lambda_n \eta d\eta$, приводит к равенству

$$(-aA_n + \gamma_n B_n) \frac{l}{2} = W_n^{(t)} - C'_0(0)S_n - C'_1(0)K_n.$$

Отсюда находим значение коэффициента

$$B_n = \frac{a}{\gamma_n} A_n + \frac{2}{\gamma_n l} \left[W_n^{(t)} - C'_0(0)S_n - C'_1(0)K_n \right].$$

Определены значения коэффициентов общего решения однородного уравнения. Теперь переходим к решению неоднородного уравнения.

Принимая решение в виде

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(t) \sin \lambda_n x,$$

удовлетворим граничным условиям $V(0, t) = 0$, $V(l, t) = 0$.

Подстановка данного решения в неоднородное уравнение приводит к уравнению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[L_n''(t) + 2aL_n'(t) + c^2 \lambda_n^2 L_n(t) \right] \sin \lambda_n x = -H(t) - xR(t).$$

Используем условия ортонормированности собственных функций $X_n(x) = \sin \lambda_n x$:

$$L_n''(t) + 2aL_n'(t) + c^2 \lambda_n^2 L_n(t) = \frac{2}{l} [-H(t)S_n - R(t)K_n]. \quad (3)$$

При $t=0$, имеем условие $L_n(0)=0$. Из второго начального условия $\partial V(x, 0)/\partial t = 0$ следует, что $L_n'(0) = 0$.

В целом, рассматриваются случаи, когда функции $L_n(t)$ определены аналитически. К такому классу относятся случаи линейной, экспоненциальной, тригонометрической и некоторых других форм задания граничных условий для скорости. При этом окончательное решение для вспомогательной функции $u(x, t)$ определяется в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(t) + L_n(t)] \sin \lambda_n x.$$

Переходя обратно, получим решение задачи по скорости

$$w(x, t) = C_0(t) + xC_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(t) + L_n(t)] \sin \lambda_n x.$$

Решение задачи относительно давления находим, интегрируя исходную систему квазиодномерных уравнений. Дело в том, что можно составить неполное телеграфное уравнение и относительно давления. Но граничные условия такого уравнения будут второго рода, которые требуют задания дополнительного условия относительно самого давления на одном из концов участка. А интегрирование исходных уравнений с привлечением начального входного условия относительно давления приводит к корректному решению задачи.

На первом шаге решения $P(x, t)$ обратимся ко второму уравнению $\partial P / \partial t = -\rho c^2 \partial w / \partial x$ исходной системы.

Находим

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = C_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n(t) + L_n(t)] \cos \lambda_n x.$$

В результате интегрирования второго уравнения исходной системы получим формулу для давления:

$$P(x, t) = -\rho c^2 \left[C_1^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \cos \lambda_n x \right] + p_t(x).$$

Здесь

$$\int_0^t C_1(\theta) d\theta = C_1^{(0)}(t) \quad \text{и} \quad \int_0^t L_n(\theta) d\theta = L_n^{(0)}(t),$$

$$Y_n^{(0)}(t) = \int_0^t Y_n(\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} \left[(-A_n a - B_n \sqrt{D_n}) (e^{-at} \operatorname{ch} \sqrt{D_n} t - 1) + \right. \\ \left. + (-A_n \sqrt{D_n} - B_n a) e^{-at} \operatorname{sh} \sqrt{D_n} t \right] & \text{при } D_n > 0, \\ A_n \frac{1 - e^{-at}}{a} + B_n \left(-\frac{te^{-at}}{a} + \frac{1 - e^{-at}}{a^2} \right) & \text{при } D_n = 0, \\ \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} \left[(-A_n a - B_n \sqrt{|D_n|}) (e^{-at} \cos \sqrt{|D_n|} t - 1) + \right. \\ \left. + (A_n \sqrt{|D_n|} - B_n a) e^{-at} \sin \sqrt{|D_n|} t \right] & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

При использовании решения для случая $a \rightarrow 0$ (когда сила трения пренебрежимо мала) в выражении $Y_n^{(0)}(t)$ необходимо учитывать значения пределов

$$e^{-at} \rightarrow 1, \quad \frac{1 - e^{-at}}{a} \rightarrow t, \quad -\frac{te^{-at}}{a} + \frac{1 - e^{-at}}{a^2} \rightarrow t^2$$

и принять

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[A_n \frac{1-e^{at}}{a} + B_n \left(-\frac{te^{-at}}{a} + \frac{1-e^{-at}}{a^2} \right) \right] = A_n t + B_n t^2.$$

Надо определить значение $p_t(x)$ – постоянного интегрирования по времени. Для определения его обратимся к первому уравнению $-\partial P/\partial x = \rho(\partial w/\partial t + 2aw)$ исходной системы.

Вычислим

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \rho c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x + p'_t(x)$$

и

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = C'_0(t) + xC'_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y'_n(t) + L'_n(t)] \sin \lambda_n x.$$

Эти выражения и выражение для скорости $w(x,t)$ вставим в первое уравнение исходной системы:

$$\begin{aligned} & -\rho c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x - p'_t(x) = \\ & = \rho \left[C'_0(t) + xC'_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y'_n(t) + L'_n(t)] \sin \lambda_n x \right] + \\ & + 2a\rho \left[C_0(t) + xC_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(t) + L_n(t)] \sin \lambda_n x \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} p'_t(x) &= -\rho [C'_0(t) + 2aC_0(t)] - \rho [C'_1(t) + 2aC_1(t)]x - \\ & - \rho \sum_{n=1}^{\infty} [Y'_n(t) + 2aY_n(t) + c^2 \lambda_n^2 Y_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x - \\ & - \rho \sum_{n=1}^{\infty} [L'_n(t) + 2aL_n(t) + c^2 \lambda_n^2 L_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x. \end{aligned}$$

Преобразуем первую сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [Y'_n(t) + 2aY_n(t) + c^2 \lambda_n^2 Y_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [Y_n''(\theta) + 2aY_n'(\theta) + c^2 \lambda_n^2 Y_n(\theta)] d\theta \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x d\theta = E(x). \end{aligned}$$

Здесь учитывали, что $\int_0^t [Y_n''(\theta) + 2aY_n'(\theta) + c^2 \lambda_n^2 Y_n(\theta)] d\theta = c_n = const$ представляет коэффициенты разложения по собственным функциям некой функции $E(x)$.

Аналогично поступим со второй суммой (см. (3)):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [L'_n(t) + 2aL_n(t) + c^2 \lambda_n^2 L_n^{(0)}(t)] \sin \lambda_n x = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [L_n''(\theta) + 2aL_n'(\theta) + c^2 \lambda_n^2 L_n(\theta)] d\theta \sin \lambda_n x = \\ & = \int_0^t \frac{2}{l} [-H(\theta)S_n - R(\theta)K_n] d\theta = \frac{2}{l} [-H^{(0)}(t)S_n - R^{(0)}K_n]. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } H^{(0)}(t) = \int_0^t H(\theta) d\theta, \quad R^{(0)}(t) = \int_0^t R(\theta) d\theta.$$

При подстановке полученных значений сумм имеем

$$\begin{aligned} p_t'(x) &= -\rho[C_0'(t) + 2aC_0(t)] - \rho[C_1'(t) + 2aC_1(t)]x - \\ &\quad -\rho E(x) + \rho \frac{2}{l} [H^{(0)}(t)S_n + R^{(0)}(t)K_n] = \\ &= -\rho \left[C_0'(t) + 2aC_0(t) - \frac{2}{l} (H^{(0)}(t)S_n + R^{(0)}(t)K_n) \right] - \\ &\quad -\rho[C_1'(t) + 2aC_1(t)]x + \rho E(x). \end{aligned}$$

Теперь интегрируем по x :

$$\begin{aligned} p_t(x) &= -\rho \left\{ C_0'(t) + 2aC_0(t) - \frac{2}{l} [H^{(0)}(t)S_n + R^{(0)}(t)K_n] \right\} x - \\ &\quad -\rho[C_1'(t) + 2aC_1(t)] \frac{x^2}{2} + \rho \int_0^x E(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Вставим полученное выражение в формулу для давления:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \rho c^2 C_n^{(0)}(t) - \rho \left\{ C_0'(t) + 2aC_0(t) - \frac{2}{l} [H^{(0)}(t)S_n + R^{(0)}(t)K_n] \right\} x - \\ &\quad -\rho[C_1'(t) + 2aC_1(t)] \frac{x^2}{2} + \rho c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \cos(\lambda_n x + \varphi_n) + \rho \int_0^x E(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Значение последнего интеграла определяется согласно начальному распределению давления по длине участка, которое представлено выше.

При $t=0$ члены, выделенные верхним индексом (0) и заглавными буквами, превращаются в нуль. В связи с этим для определения значения интеграла получим равенство:

$$\begin{aligned} p_{00} - \rho \int_0^x [w^{(t)}(\eta) + 2aw^{(0)}(\eta)] d\eta = \\ = -\rho[C_0'(t) + 2aC_0(t)]x - \rho[C_1'(t) + 2aC_1(t)] \frac{x^2}{2} + \rho \int_0^x E(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда находим значение интеграла и вставим в формулу для давления:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= p_{00} - \rho \int_0^x [w^{(t)}(\eta) + 2aw^{(0)}(\eta)] d\eta - \\ &\quad -\rho c^2 \left\{ C_1^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [Y_n^{(0)}(t) + L_n^{(0)}(t)] \cos \lambda_n x \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } C_1^{(0)}(t) = \frac{1}{l} \int_0^t [\bar{w}(\theta) - \tilde{w}(\theta)] d\theta.$$

Физический смысл членов очевиден: первый член – входное давление в начале процесса; второй член – перепад давления в начальном распределении; член с $C_1^{(0)}(t)$ – изменение среднего для участка давления в зависимости от разности входной и выходной скорости; сумма отражает изменения в процессе перехода в другой режим работы. При

больших значениях члена с $C_1^{(0)}(t)$ решение может расти или убывать до бесконечности, когда $\bar{w} \neq \tilde{w}$. При этом время расчета адекватного решения ограничивается. А при $\bar{w} = \tilde{w}$, через определенное время процесс устанавливается.

Таким образом, функции для граничных скоростей $\bar{w}(t)$, $\tilde{w}(t)$ – дважды дифференцируемые и интегрируемые функции, а функции для $w^{(0)}(x)$ и $w^{(t)}(x)$ – интегрируемые.

Мы продемонстрировали формальный ход решения задачи. В процессе решения задачи относительно $w(x,t)$ и $P(x,t)$ считали уже известными отдельные производные и интегралы. Но при расчетах ограничиваемся только рассмотрением задач о переходных процессах. Для каждого из случаев будем приводить конкретные значения производных и интегралов.

Обсуждение результатов. Составили программу расчета скорости и давления для переходных процессов на горизонтальном участке трубопровода, когда начальные и граничные условия выражены постоянными значениями. При расчетах использовали значения: длина участка $l=1200$ м, диаметр участка 0.2 м, коэффициент сопротивления $\lambda=0.018$, скорость распространения малых возмущений $c=1200$ м/с, входное давление $p_{00}=7.0$ МПа, масштаб скорости $w^*=5$ м/с и шаг по длине $l/50$. Серии расчетов проводили с учетом и без учета силы трения и с шагами по времени $l/100$ с и $l/10$ с.

В каждую серию входили варианты перехода: от меньшей скорости к большей, от большей скорости к меньшей, от начальной скорости к разным граничным скоростям. При одинаковых значениях граничных скоростей масса жидкости на элементарном участке остаётся постоянной, при большем значении входной скорости по сравнению с выходной скоростью, масса жидкости на участке увеличивается по времени по линейному закону, а при меньшем значении входной скорости – наоборот.

В первом варианте принимали $w_{00}=w^{(1)}=0$ м/с, $w^{(0)}=5$ м/с. Это соответствует закачке воды с увеличением давления на участке.

Условный период процесса составляет $T=2l/c$. Графики скорости имели двух- и трехзвенную структуру. В первой половине первого условного периода графики скоростей по длине имели постоянную нижнюю огибающую и вновь образованную верхнюю огибающую.

Во второй половине первого периода верхняя огибающая осталась как в первом полупериоде, и образовалась убывающая нижняя огибающая (рис. 1).

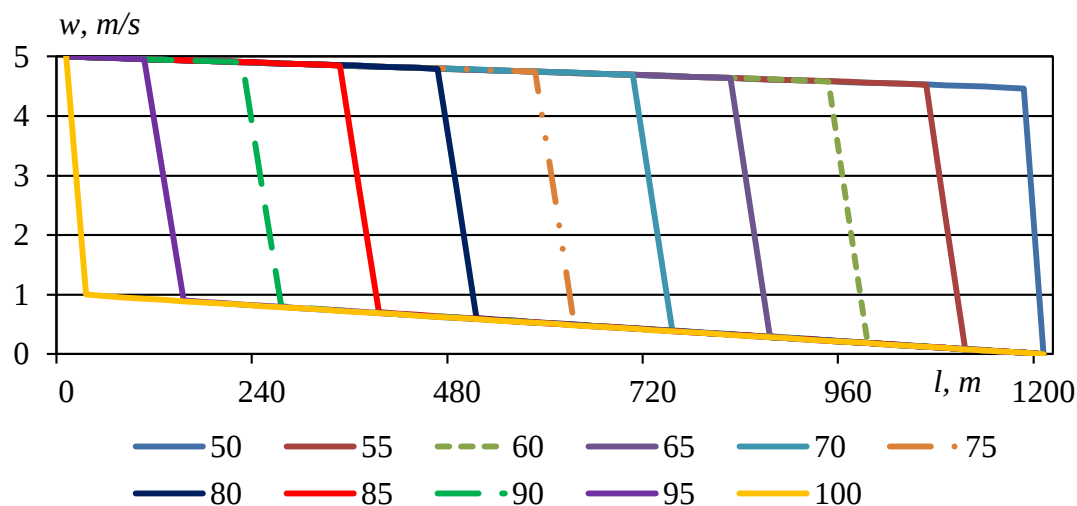


Рис. 1. Графики скорости по длине участка на 50, 55... 100-м шагах времени при $\tau=l/(100c)$, $l=1200$ м, $D=0.2$ м, $\lambda=0.018$, $w^*=5$ м/с, $c=1200$ м/с, $w_{00}=w^{(1)}=0$ м/с, $w^{(0)}=5$ м/с, $p_{00}=7.00$ МПа

На рис. 2 приведены графики изменения скорости потока во времени в различных сечениях участка. По абсциссе расположены номера временных шагов при $\tau=l/(100c)$, т.е. каждые 100 шагов представляют условный период процесса $T=2l/c$.

Верхняя кривая получена для сечения $x=24$ м. В целом, она постепенно убывает. Локальные минимумы, достигающиеся в кратных условному периоду значениях времени, постепенно возрастают.

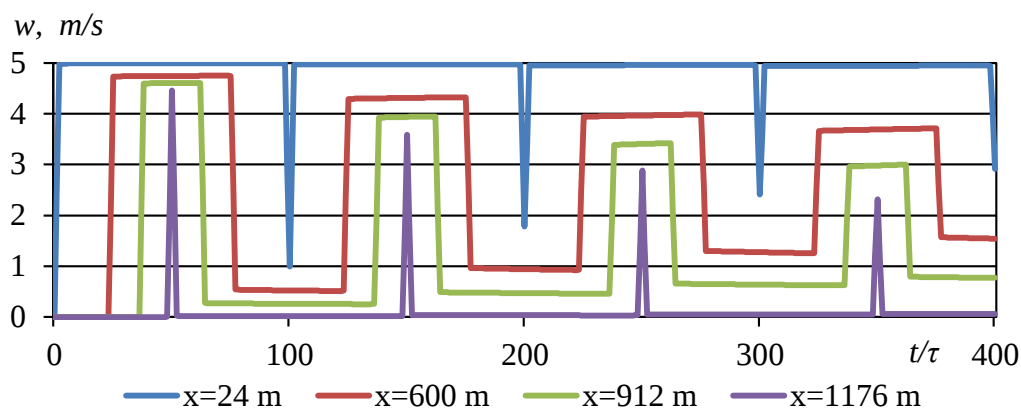


Рис. 2. Графики скорости потока в различных сечениях участка. Данные см. рис. 1.

Нижняя кривая соответствует расстоянию 1176 м, т.е., это близкая к концу участка точка. Кривая постепенно возрастает. Ее локальные максимумы соответствуют точкам $(n+0.5)T$. Левые склоны локальных максимумов соответствуют волнам уплотнения, а правые – волнам разряжения. В промежуточных кривых такая закономерность остается в силе. Но для них образуются верхние ступеньки, которые сохраняются в течение времени от достижения прямой и обратной волн.

На рис. 3 приведены результаты расчета с шагом $l/(10c)$ по времени, относящиеся к концам и середине участка. Здесь более явно выражено экспоненциальное убывание амплитуды возмущений скорости: одностороннее убывание амплитуды в приграничных узлах, двухстороннее ее убывание в срединных узлах расчета.

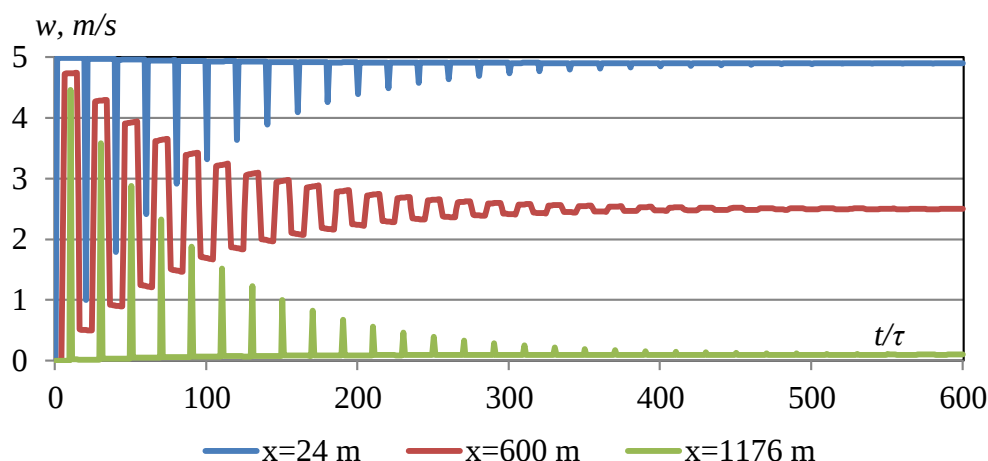


Рис.3. Графики скорости потока в различных сечениях участка при шаге $l/(10c)$ по времени. Данные см. рис. 1.

На рис. 4 представлены графики давления по длине участка, что соответствует рис. 2 для скоростей. Здесь на каждом шаге происходит перестроение графиков за счет увеличения массы жидкости на участке. Такой же фактор проявляется на графиках давления по времени для разных сечений участка (рис. 5).

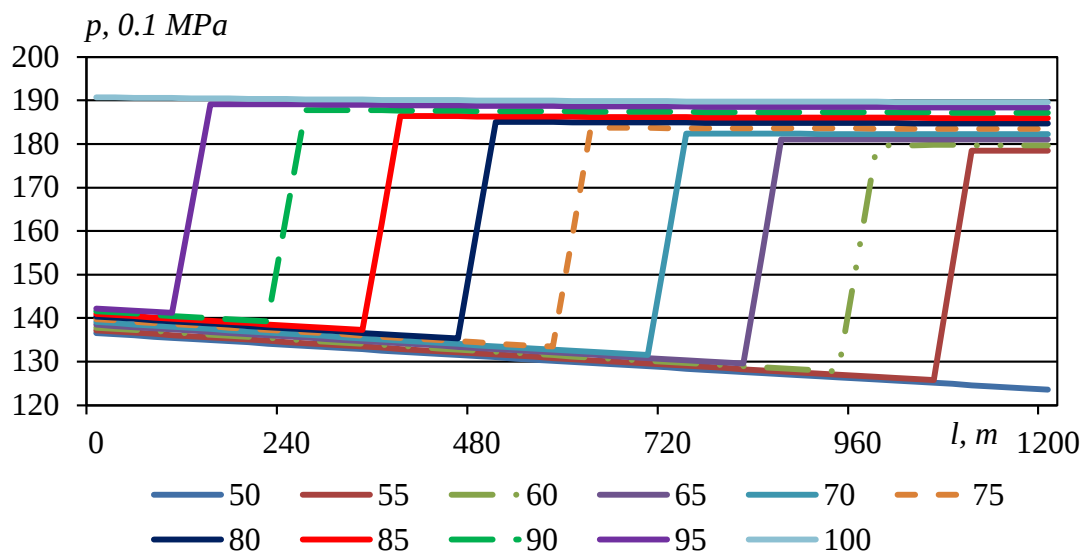


Рис. 4. Кривые давления во втором условном полупериоде. Данные см. рис. 1.

Во всех вариантах расчета с учетом силы трения, когда входная и выходная скорости имеют одинаковые значения, условный период возмущений составлял $T=l/c$

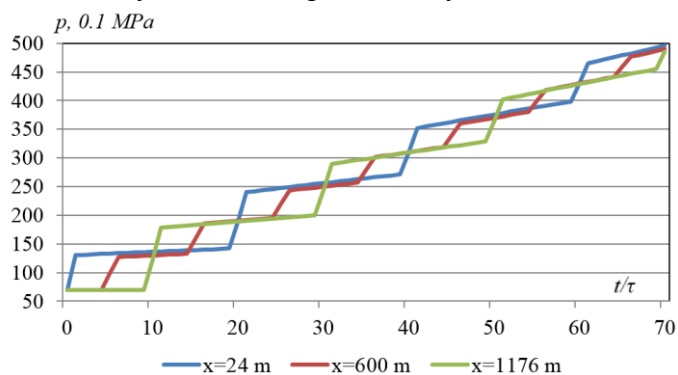


Рис. 5. Кривые давления для различных сечений трубопровода. Данные см. рис. 1

На рис. 6 показаны графики по длине для такого случая (вариант III) $w_{00}=0$ м/с,
 $w^{(0)} = w^{(1)} = 5$ м/с .

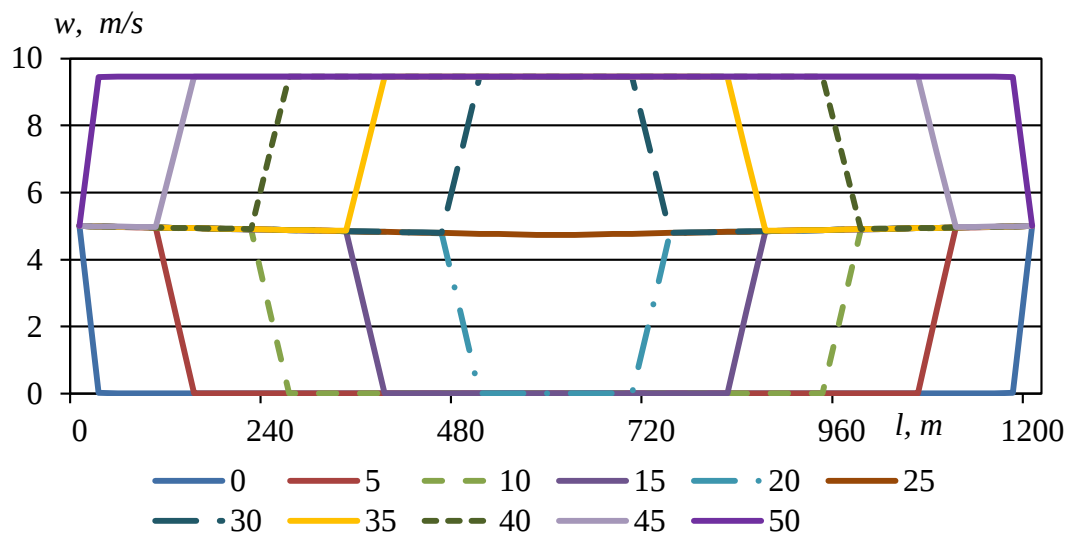


Рис. 6. Графики скорости по длине участка, полученные за первые десять шагов по времени при $\tau=l/(5c)$.
 $l=1200$ м, $D=0.2$ м, $\lambda=0.018$, $w^*=5$ м/с, $c=1200$ м/с, $w_{00}=0$ м/с, $w^{(0)} = w^{(1)} = 5$ м/с, $p_{00}=7.00$ МПа

На рис. 7 приведены временные изменения скорости потока в четырех сечениях трубопровода в первые четыре условных периода. А полная картина по времени аналогична средней кривой на рис. 3.

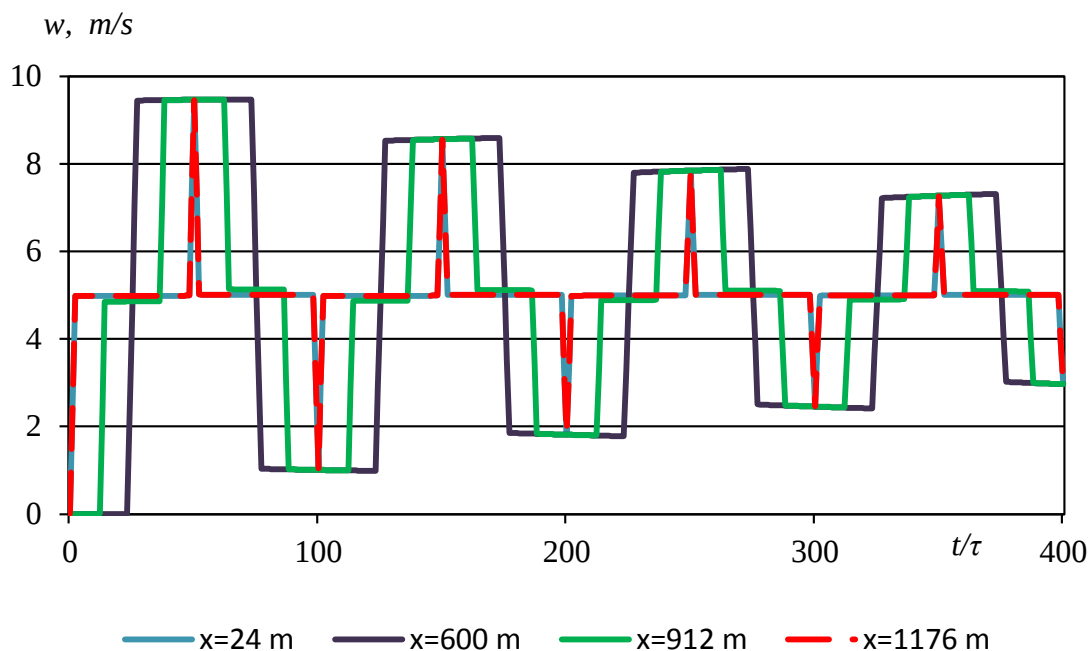


Рис. 7. Графики скорости потока в различных сечениях участка. Шаг по времени $l/(100c)$. Данные см. рис. 6

Так как процесс соответствует запуску участка, то ожидается определенный (линейный) перепад давления по длине участка. Такой переход представлен на рис. 8.

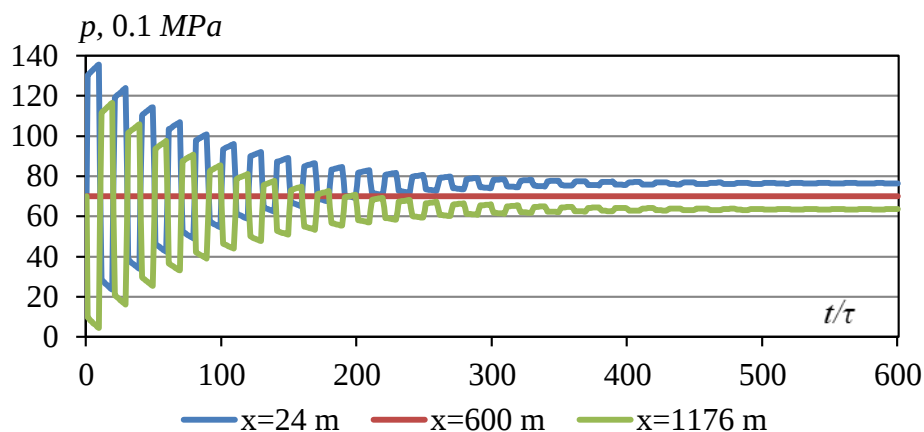


Рис. 8. Изменение давления по времени в различных сечениях трубопровода. Шаг по времени $l/(10c)$. Данные см. рис. 6

На рис. 9 представлены графики давления для первого условного периода. График с наибольшим значением во входном сечении и наименьшим в выходном сечении соответствует начальному условию задачи с входным значением 7.0 МПа . Процесс перехода давления в сечениях представлен на рис. 10. Как видно из этих рисунков, интервал изменения давления сужается, т. к. скорость потока уменьшилась. Интересно то, что после первого условного периода значение давления в середине участка остается постоянным.

Аналогичные расчеты проведены для вариантов $w^{(0)}=w^{(1)}=5 \text{ м/с}$, $w^{(1)}=6 \text{ м/с}$ (IV), $w^{(1)}=4 \text{ м/с}$ (V), $w^{(0)}=w^{(1)}=0 \text{ м/с}$ (VI). Условные периоды вариантов IV и V составили $T=2l/c$, а варианта VI – $T=l/c$. Вариант IV показал повсеместное убывание давления, а вариант V – возрастание. В варианте VI наблюдали переход к однородным распределениям скорости и давления по длине участка.

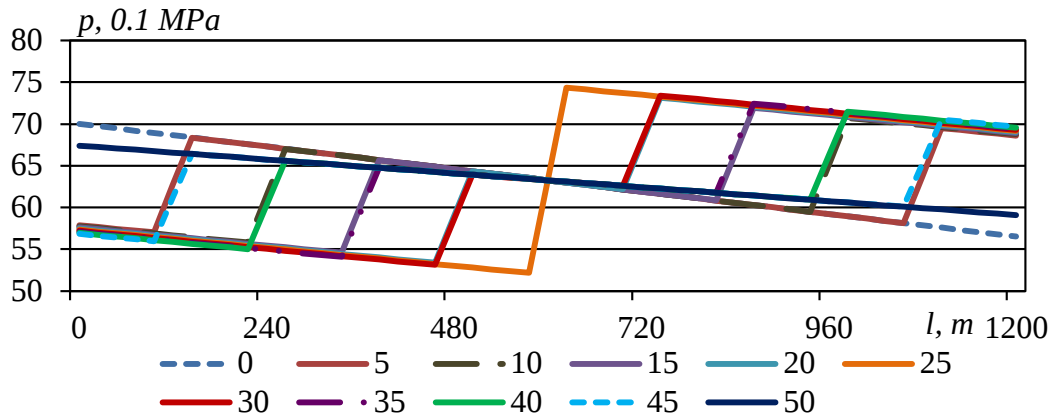


Рис. 9. Кривые давления в зависимости от расстояния при различных шагах времени n . $w_{00}=5$ м/с, $w^{(0)}=w^{(1)}=4$ м/с. Остальные данные см. рис. 1

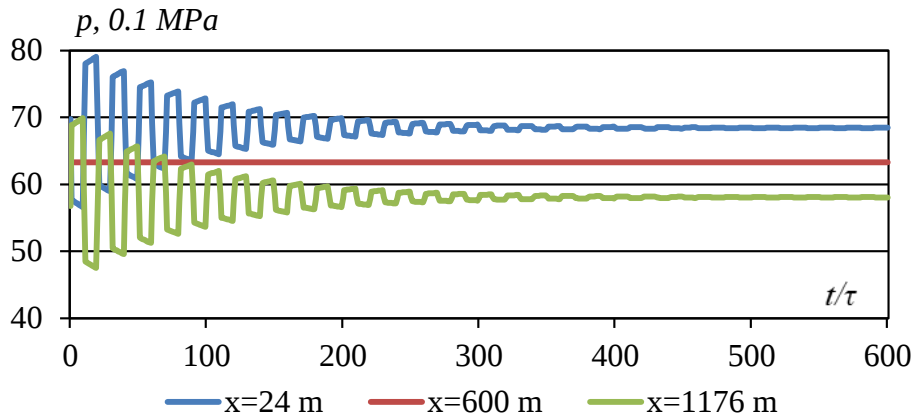


Рис. 10. Динамика давления в разных сечениях трубопровода при крупном шаге времени $l/(10c)$. Данные см. рис. 9

В серии расчетов при $a=0$ ($\lambda=0$) результаты образовались под влиянием тригонометрического описания амплитуд мод ($D_n < 0$). Как и в сериях для $a \neq 0$, образовались двух-, трех- и пятизвенные кривые скорости и давления по длине участка. Термин “условный период” относился только к графикам давления при $w^{(0)} \neq w^{(1)}$. В каждом из периодов этого случая получали одинаковые графики по времени, а скачки давления происходили в конце условного периода. В остальных случаях получали только периодические решения, т.к. гашение возмущений не происходит из-за отсутствия силы трения.

Заключение. Предложена математическая модель динамического состояния элементарного рельефного участка трубопровода в рамках квазиодномерных уравнений переноса импульса и массы жидкости. Доказано, что применение полного напора позволяет представить уравнения в виде обычных уравнений трубопроводного транспорта в горизонтальной трассе.

Для решения задачи, когда на концах участка заданы законы изменения скорости потока по времени, составлено отдельное уравнение телеграфного типа для скорости, которое решено методом Фурье. Собственными функциями вспомогательной задачи с однородными граничными условиями являются синусоидальная функция $X_n(x) = \sin(\pi n/l)x$ и три вида амплитуд затухающих возмущений:

$$Y_n(t) = \begin{cases} e^{-at} \left(A_n ch \sqrt{D_n} t + B_n sh \sqrt{D_n} t \right) & \text{при } D_n > 0, \\ e^{-at} (A_n + B_n t) & \text{при } D_n = 0, \\ e^{-at} \left(A_n \cos \sqrt{|D_n|} t + B_n \sin \sqrt{|D_n|} t \right) & \text{при } D_n < 0. \end{cases}$$

Показано, что высокочастотные составляющие возмущений гасятся экспоненциальным законом (первая строка), а низкочастотные возмущения (третья строка) могут проникать дольше. В квазирезонансной частоте (вторая строка) амплитуда возмущений имеет линейно возрастающий множитель, но наличие экспоненциального множителя приводит к гашению резонансных возмущений (квазирезонансный случай).

С привлечением найденного значения скорости и исходных уравнений получено решение задачи для полного напора, который в случае горизонтального трубопровода переходит к обычному давлению. В случае положительной разницы между входной и выходной скоростями, ожидается монотонное возрастание давления на участке, а при отрицательной разнице – монотонное убывание. Скорость изменения среднего давления на элементарном участке пропорциональна величине разности между входной скоростью $\bar{w}$ – $\tilde{w}$. В связи с этим при $\bar{w} - \tilde{w} \neq 0$ решение задачи имеет смысл только на малых отрезках времени.

Доказано, что при $a \rightarrow 0$ (при игнорировании силы трения) образуется негасящийся незатухающий колебательный процесс с подвижной границей скачка скорости.

Результаты работы получены для круглого сечения трубопровода. Для применения результатов при расчете трубопровода с другой формой поперечного сечения вместо диаметра D можно использовать удвоенный эквивалентный радиус трубопровода [21].

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lewandowski A. New numerical methods for transient modeling of gas pipeline networks // PSIG Annual Conference October 18-20, 1995. Albuquerque, New Mexico, USA, 1995.
- [2] Чарный И.А. Неуставившееся движение реальной жидкости в трубах. Изд. 2-е. М.: Недра, 1975, 296 с.
- [3] Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте. Математические методы моделирования и практическое применение. М.: МАКС Пресс, 2007, 200 с.
- [4] Чарный И.А., Коротаев Ю.П., Ширковский А.И. Добыча, транспорт и подземное хранение газа. М.:Недра, 1997, 487с.
- [5] Файзуллаев Д.Ф., Мукук К.В. Последовательные движения жидкостей. Ташкент: Фан, 1976, 184 с.
- [6] Грачев В.В., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И. Динамика трубопроводных систем. М.: Наука, 1987, 438 с.
- [7] Грачев В.В., Гусейнзаде М.А., Ксендз Б.И., Яковлев Е.И. Сложные трубопроводные системы. М.: Недра, 1982, 256 с.
- [8] Atena A., Tekalign W., Muche T. Steady State Gas Flow in Pipeline Networks: Existence and Uniqueness of Solution // J. Appl. Math. Phys. 2020, Vol. 08, No. 06, pp. 1155–1167.
- [9] Khujayev I.K., Bozorov O.Sh., Mamadaliyev Kh.A., Aminov H.Kh., Akhmadjonov S.S. Finite-difference method for solving nonlinear equations of traveling waves in main gas pipelines // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2020, №5 (29), стр. 95-107.
- [10] Ражабов У.М., Жонкобилов У.У. Расчет гасителей гидравлического удара в длинных напорных трубопроводах насосных станций. Ташкент: Интеллект нашриёт, 2022, 130 с.
- [11] Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Гусейнзаде М.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Наука, 1972, 192 с.
- [12] Бозоров О.Ш., Маматкулов М.М. Аналитические исследования нелинейных гидродинамических явлений в средах с медленно меняющимися параметрами. Ташкент. ТИТЛП, 2015, 96 с.
- [13] Ермолаева Н.Н. Математическое моделирование нестационарных неизоэнергетических процессов в движущихся многофазных средах: Дисс.на соискание уч. степ. д.ф.-м.н. СПб. 2017. 323 с.
- [14] Figueiredo A.B., Baptista R.M., Freitas Rachid F.B., Bodstein G.C.R. Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model // Int. J. Multiph. Flow. 2017, Vol. 88, pp. 30–49.
- [15] Zemenkov Yu.D., Shalay V.V., Zemenkova M.Yu. Immediate analyses and calculation of saturated steam pressure of gas condensates for transportation conditions // Procedia Engineering, 2015, Vol. 113, pp. 254-258.
- [16] Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 678 с.
- [17] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 736 с.
- [18] Хужаев И.К., Хожиккулов Ш.Ш., Шамсутдинова Н.Ш. Задача Штурма-Лиувилля для произвольной комбинации неоднородных граничных условий первого, второго и третьего родов граничных условий // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2023, №2(47), стр. 125-128.
- [19] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, 576 с.
- [20] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1964, 608 с.
- [21] Штеренлихт Д.В. Гидравлика. Учеб. пособие для ВУЗов. М.: Энергоатомиздат, 1991, 351 с.

Дата поступления
14.03.2025

Xojiqulov Sh.Sh., Xujayev I.K., Baxtiyorov B.B., Relyefli quvur orqali siqilmaydigan suyuqlikni uzatish masalasini yechish uchun Furye usulini qo'llash

Annotatsiya. N.E. Jukovskiyning kvazi bir o'lchovli tenglamalari doirasida chegaralarida tezlik vaqt bo'yicha o'zgaruvchi quvur elementar qismidagi o'tish jarayoni masalasi shakllantirilgan va yechilgan, bunda quvur o'qi nivelir balandligining masofaga bog'liq o'zgarishi qo'shimcha omil sifatida hisobga olingan. Ko'ndalang kesim yuzasi bo'yicha oqimning o'rtalashtirilgan tezligi uchun to'la bo'lmagan telegraf tenglamasi tuzilgan va o'zgaruvchilarga ajratish usulida yechilgan. Bosim qiymati tezlik uchun olingan yechimdan foydalanilgan holda dastlabki tenglamalarni kirishdagi bosimning boshlang'ich qiymatidan foydalangan holda integrallash orqali aniqlangan. Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning o'zgarish qiymatlari hollari uchun olingan sonli natijalari taqdim etilgan. Gorizontall quvur qismida suyuqlik massasining o'zgarish, monoton o'sishi va kamayishida tezlik va bosim o'zgarishining turli stsenariylari tahlil etilgan. Asosiy e'tibor qarshilik kuchi hisobga olingan va olinmagan hollardagi zarba to'la bo'lmagan tasniflashga qaratilgan.

Kalit so'zlar: siqilmaydigan suyuqlik, quvur, kvazi bir o'lchovli model, Furye usuli, qarshilik kuchi, gravitatsiya, hisoblash tajribasi.

Xojiqulov Sh.Sh., Khujaev I.K., Bakhtiyorov B.B. Application of the Fourier method to solve the problem of transporting incompressible fluids through a relief pipeline

Abstract. The problem of transient processes in a pipeline section, where the boundary velocities of incompressible fluid flow change over time, is formulated and solved within the framework of N.E. Zhukovsky's quasi-one-dimensional equations. The impact of changes in the pipeline's axis elevation corresponding to distance is also considered. An incomplete telegraph equation is derived for the flow velocity averaged across the cross-section. The solution is obtained using the method of separation of variables. To determine the pressure, the original system of equations is integrated, using the previously found velocity solution along with a specified initial pressure value at the pipeline's entrance. Numerical calculations are provided for cases with constant initial and boundary conditions. The analysis includes various scenarios of velocity and pressure changes along a horizontal section, focusing on the constancy, monotonic increase, and decrease of liquid mass. Special attention is given to the characteristics of shock waves, modeled with and without considering the effects of friction forces.

Key words: incompressible fluid, pipeline, quasi-one-dimensional model, Fourier method, resistance force, gravity, computational experiment.

УДК 532

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

¹Наврузов К., ²Шукуров З.К., ²Файзуллаева З., ²Рашидова Л.

¹Ургенский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

²Каттакурганский филиал Самаркандского государственного университета, Узбекистан

E-mail: shkurovzoxid742@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается решение практических задач, связанных с определением характера нестационарного течения упруговязких жидкостей в плоском канале с использованием реологической модели Шульмана-Хусида. Известно, что в большинстве случаев для течения упруговязкой жидкости используется классическая модель Максвелла в одномерном пространстве. Здесь, используя модель Шульмана-Хусида, исследовано нестационарное течение упруговязкой жидкости в плоском канале. В определенном смысле эта модель является обобщением моделей Ньютона и Максвелла.

Ключевые слова: плоский канал, упруговязкая жидкость, стационарное течение, нестационарное течение, одномерная модель, обобщенная модель, спектр, скорость.

Введение. Математическая модель вязкоупругих жидкостей основана на учете изменений упругости жидкости и обобщается в виде модели Максвелла [1, 2, 7, 17, 18, 20]. Течение упруговязкой жидкости в каналах с плоским и круглым сечениями исследовано в работе З.П. Шульмана и Б.М. Хусида [2]. Задачи ламинарных нестационарных течений вязких ньютоновских жидкостей исследованы в работах [3, 4, 5, 8] при заданном градиенте давления, а в работах [13, 15, 18] – в турбулентном режиме течения. Однако, несмотря на множество исследований, проведенных при изучении поведения неньютоновских жидкостей, в настоящее время задачи с использованием модели Шульмана-Хусида недостаточно изучены. В данной работе исследуется задача о нестационарном течении вязкоупругой жидкости в плоском длинном канале с использованием модели Шульмана-Хусида.

Материалы, методы и объект исследования. Приведем модель Шульмана-Хусида, обобщающую реологические модели всех упруговязких жидкостей:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)' T_k^{(1)} + \frac{\varepsilon}{2} T_k^{(2)}, \quad T_k^{(1)} + \frac{g_k}{\lambda_k} T_k^{(1)} = 2p_k \Omega, \quad (1)$$

$$T_k^{(2)} + \frac{g_k}{\lambda_k} T_k^{(2)} = -2p_k \Omega, \quad \frac{Dp_k}{Dt} + \frac{g_k}{\lambda_k} p_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k^2} f_k.$$

Здесь верхняя и нижняя конвективные производные определяются как:

$$T_k^{(1)} = \frac{DT_k^{(1)}}{Dt} - T_k^{(1)} \nabla V^T - \nabla V \cdot T_k^{(1)}, \quad T_k^{(2)} = \frac{DT_k^{(2)}}{Dt} + T_k^{(2)} \nabla V + \nabla V^T \cdot T_k^{(2)}.$$

А производная Яумана задается в следующем виде:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V \nabla A + W A - A W,$$

здесь $\nabla V = \Omega + W$; $\Omega = 1/2(\nabla V^T + \nabla V)$; $W = 1/2(\nabla V - \nabla V^T)$; Ω – тензор скорости деформации; ∇V – градиент скорости деформации; ∇V^T – транспонированный градиент скорости деформации; вводится параметр ε , представляющий разность ненулевых вторых нормальных напряжений, который определяется по формуле $\varepsilon/2 = \Psi_2/\Psi_1$. Здесь $\Psi_1 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})/\gamma^2$, $\Psi_2 = (\sigma_{22} - \sigma_{33})/\gamma^2$ – соответственно, функции разности первого и второго, второго и третьего напряжений; p_k – параметр, который можно определить из самого уравнения; $T_k^{(1)}$, $T_k^{(2)}$ – тензоры деформаций, состоящие из девяти элементов. $T_k^{(1)}$, $T_k^{(2)}$ – тензоры напряжений, заданные в произвольно выбранной системе координат, а определенные для них производные обозначают, соответственно, верхнюю и нижнюю конвективные производные [18-19].

Для простоты представим модель Шульмана-Хусида в модифицированном виде [10, 11]:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k, \quad \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + T_k = 2\eta_k \Omega, \quad \Omega = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2)$$

Из этой модели при $\lambda \rightarrow 0$ получается ньютоновская модель:

$$T = \eta \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

Когда число α , характеризующее распределение спектра времени релаксации, стремится к бесконечности, получается модель Максвелла:

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4).$$

С помощью этих трех моделей мы изучим процесс перехода из нестационарного состояния упруговязкой жидкости в стационарное.

Постановка задачи. Обозначим расстояние между плоскими стенками $2h$. Предположим, что канал достаточно длинный и выберем его как характерную относительную длину для течения упруговязкой жидкости. При этом отношение ширины канала к длине вдоль продольной оси считается бесконечно малой величиной, поэтому в течениях не появляются поперечные скорости, и ось x берется в горизонтальном направлении по длине русла, а ось y берется в вертикальном направлении, перпендикулярном оси x . В таких случаях движение жидкости в плоском канале с учетом ее реологических свойств выражается системой уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, & \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k, & \lambda_k \frac{\partial \tau_k}{\partial t} + \tau_k = \eta_k \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\lambda_k = \frac{\lambda}{k^\alpha}$, $\eta_k = \frac{\eta}{\xi(\alpha)k^\alpha}$.

Начальные и граничные условия вводятся следующим образом:

$$u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ при } t=0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, \quad t > 0; \quad u = 0 \text{ при } y=h, \quad t > 0. \quad (7)$$

Учитывая начальные условия (6), применим замену Лапласа-Карсона

$$\bar{u} = s \int_0^\infty e^{-st} u dt, \quad \bar{\tau} = s \int_0^\infty e^{-st} \tau dt, \quad (8)$$

где s – параметр подстановки, к системе линеаризованных уравнений (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow s\bar{u}, & \frac{\partial u}{\partial y} &\rightarrow \frac{d\bar{u}}{dy}; \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &\rightarrow s\bar{\tau}, & \frac{\partial p}{\partial x} &\rightarrow \frac{d\bar{p}}{dx}. \end{aligned}$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho s \bar{u} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{d}{dy}(\bar{\tau}), \\ \bar{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_k, \quad s\bar{\tau}_k + \frac{1}{\lambda_k} \bar{\tau}_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k} \frac{d\bar{u}}{dy}. \end{cases} \quad (9)$$

В этом случае граничные условия принимают следующий вид:

$$\text{при } y=0: \quad \frac{d\bar{u}}{dy} = 0; \quad \text{при } y=h: \quad \bar{u} = 0. \quad (10)$$

После некоторых видоизменений получим уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \frac{\rho s}{\eta_k(s)} \bar{u} = \frac{1}{\bar{\eta}_k(s)} \frac{d\bar{p}}{dx}. \quad (11)$$

С учетом граничных условий (6) решение уравнения (11) принимает следующий вид:

$$\bar{u}(y, s) = \frac{1}{\rho s} \left(-\frac{d\bar{p}}{dx} \right) \left(1 - \frac{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}_k(s)}} y \right)}{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}_k(s)}} h \right)} \right). \quad (12)$$

Применяя к решению (12) обратное преобразование Лапласа-Карсона

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{1}{\rho s} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}_k(s)}} y \right)}{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\bar{\eta}_k(s)}} h \right)} \right) \frac{ds}{s}, \quad (13)$$

получим окончательное решение системы уравнения (5) в виде:

$$u(y,t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \xi(\alpha)}{(2n+1)^3 \pi^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^\alpha - 2EL\bar{s}_{k,1n})}{(k^\alpha - EL\bar{s}_{k,1n})^2}} \times \right. \right. \\ \left. \times \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{k,1n} t} + \frac{(-1)^n \xi(\alpha)}{(2n+1)^3 \pi^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^\alpha - 2EL\bar{s}_{k,2n})}{(k^\alpha - EL\bar{s}_{k,2n})^2}} \times \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{k,2n} t} \right], \quad (14)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_{0\max}} = 1 - 32 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{\xi^2(2)EL}}{3\sqrt[3]{(2n+1)^7} \pi^3} (\cos A\sqrt{3}t - \sqrt{3} \sin A\sqrt{3}t) e^{-\frac{\nu}{h^2} At}. \quad (15)$$

где $u_{0\max} = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$ – максимальная стационарная скорость; $A = \frac{\sqrt[3]{(2n+1)^4} \pi^2}{8\sqrt[3]{\xi^2(2)EL}}$.

Найденное решение (15) представляет собой решение модели Шульмана-Хусида, с применением которого изучается процесс перехода из нестационарного состояния вязко-упругой жидкости в стационарное состояние в плоском канале.

В частном случае, при $\lambda=0$ из (14) получаем решение для Ньютонской жидкости

$$u(y,t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_t} \right], \quad (16)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_{0\max}} = 1 + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos \left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_t}. \quad (17)$$

Для Максвелловской жидкости решение (14) имеет вид:

$$u(y,t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{(1-2EL\bar{s}_{1n})}{(1-EL\bar{s}_{1n})^2}} \times \right. \right. \\ \left. \times \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{1n} t} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{(1-2EL\bar{s}_{2n})}{(1-EL\bar{s}_{2n})^2}} \times \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{2n} t} \right]. \quad (18)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_{0\max}} = 1 + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{(1-2EL\bar{s}_{1n})}{(1-EL\bar{s}_{1n})^2}} e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{1n} t} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{(1-2EL\bar{s}_{2n})}{(1-EL\bar{s}_{2n})^2}} e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{2n} t} \right] \quad (19)$$

Результаты и обсуждение. Представим результаты численного расчета по полученным решениям (15), (17) и (19) в виде графиков.

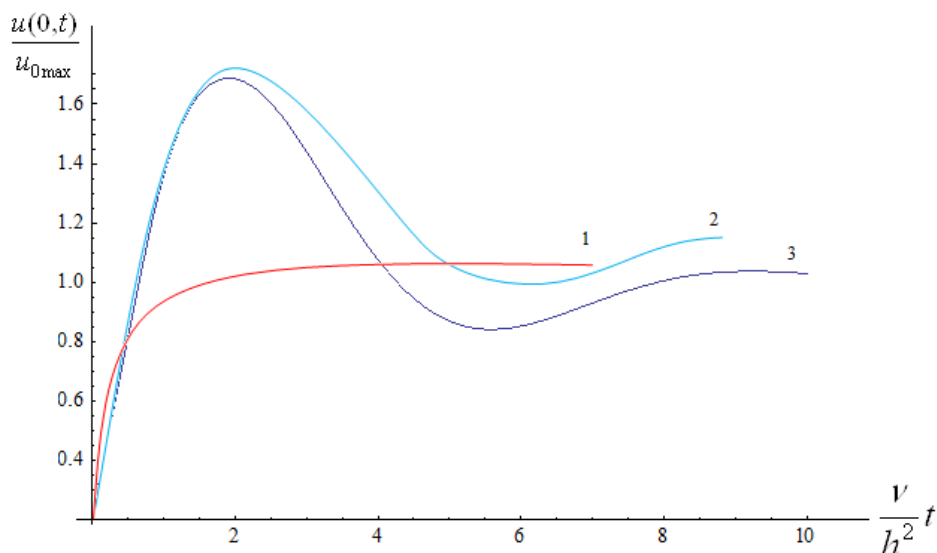


Рис. 1. Изменение отношения максимальной продольной скорости вязкоупругой жидкости в нестационарном состоянии к максимальной продольной скорости в стационарном состоянии в зависимости от времени. 1 – движение Ньютоновской жидкости; 2 и 3 – по модели Шульмана-Хусида: 2 – при $EL=2$, $\alpha=2$, $\xi(2)\approx 1.7$; 3 – при $EL=1$, $\alpha=2$, $\xi(2)\approx 1.7$

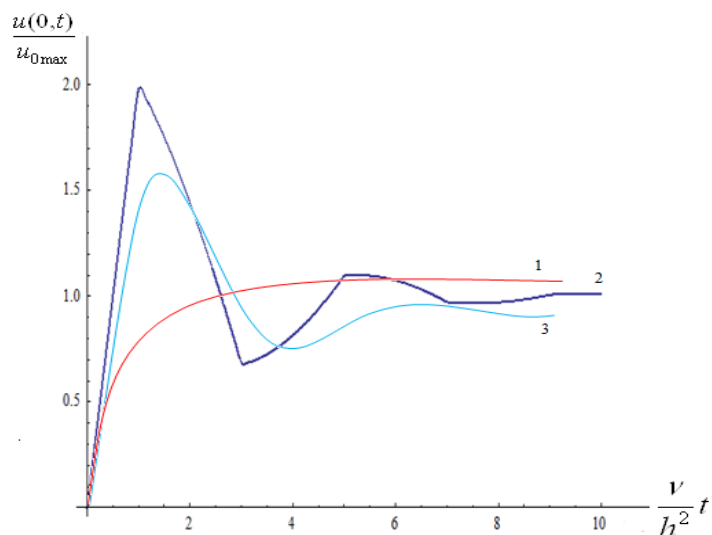


Рис. 2. Изменение отношения максимальной скорости нестационарной вязкоупругой жидкости к максимальной скорости в стационарном течении в зависимости от времени. 1 – Ньютоновская жидкость; 2 – жидкость Максвелла, $EL=1$; 3 – в случае жидкости Шульмана-Хусида, при $EL=1$, $\alpha=2$, $\xi(2)\approx 1.7$

Из первого и второго графиков видно, что процесс перехода вязкоупругой жидкости из нестационарного состояния в стационарное состояние резко отличается от процесса в Ньютоновской жидкости. При переходе из нестационарного состояния в стационарное максимальная относительная скорость вязкоупругой жидкости увеличивается в пределах полутора-двух раз, по сравнению с максимумом относительной скорости Ньютоновской жидкости.

Закключение. Движение упруговязких жидкостей в плоском канале исследовано на основе упрощенных математических моделей и полученные результаты сопоставлены с результатами переходных процессов Ньютоновской жидкости. Выявлено, что в переходном процессе упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное на основе моделей Максвелла и Шульмана-Хусида изменение скорости носит колебательный характер в отличие от Ньютоновской жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Astarita J., Marrucci J. Fundamentals of the hydromechanics of non-Newtonian fluids. M.: Mir, 1978. 309 p.
- [2] Shulman Z.P., Khusid B.M. Nonstationary processes of convective transport in hereditary media. Minsk, 1983. 256 p.
- [3] Kolosov B.V. On the mechanism of non-Newtonian behavior of a liquid // Electronic scientific journal "Oil and Gas Business". 2015, No. 1, pp. 56-61.
- [4] Matvienko V.N., Kirsanov E.A. Structural justification of the non-Newtonian flow // Bulletin of Moscow State University. Lomonosov series 2. Chemistry. 2017, Vol. 58, No. 2, pp. 105-113.
- [5] Nigmatulin R.I. Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media. M.: Nauka, 1978. 336 p.
- [6] Valueva E.P., Purdin M.S. Pulsating laminar flow in a rectangular channel // Thermophysics and Aerodynamics. 2015, Vol. 22, No. 6, pp. 761-773.
- [7] Truesdell K. The initial course of rational continuum mechanics. M.: Mir, 1975. 592 p.
- [8] Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S. and Khuzhayorov B.Kh. Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube // Fluid Dynamics, 2021, Vol. 56, No 2, pp. 189-199.
- [9] Navruzov K., Sharipova Sh., Kujatov N., Begjanov A. General rheological model of elastic viscosity fluids // Novateur publications Journal NX-A Multidisciplinary peer reviewed Journal. 2020, Vol. 6, No. 10, pp. 138-142.
- [10] Navruzov K., Shukurov Z. K., Begjanov A. Sh. Method for determining hydraulic resistance during fluid flow in pipes // Electronic journal of actual problems of modern science, education and training. 2019, Issn 2181-9750, pp. 532-542.
- [11] Navruzov K., Turayev M., Shukurov Z. Pulsating flows of viscous fluid in flat channel for given harmonic fluctuation of flow rate // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 401, pp. 02010.
- [12] Shukurov Z.K., Yuldoshev B.S., Begjanov A. Investigation of hydraulic resistance of pulsating flows of viscous fluid in elastic pipe // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 365, pp. 03026.
- [13] Litvinov V.G. The motion of a non-linear viscous fluid. M.: Nauka, 1982, 374 p.
- [14] Navruzov K., Razhabov S.Kh., Shukurov Z.K. Impedance method for determining hydraulic resistance in large arterial vessels with permeable walls // Uzb. magazine "Problems of mechanics". 2017, No. 3-4. pp. 28-32.
- [15] Ogibalov P.M., Mirzajanzade A.Kh. Unsteady movements of visco-plastic media. M.: Moscow State University Publishing House, 1977, 373 p.
- [16] Shukurov Z. K. Unsteady flow of a viscoelastic liquid in a flat channel in the presence of a pressure drop // Publishing House "Education and Science". Praha, Czech Republic, 2021, pp. 29-31.
- [17] Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S., Khuzhayorov B.Kh. Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube // Fluid Dynamics, 2021, Vol. 56, No. 2. pp. 189-199.
- [18] Chhabra R.P., Non-Newtonian Fluids: An Introduction, SERC Scyool-Cum-Symposium on Rheology of Complex Fluids // IIT-Madras. 2010, pp. 1-33.
- [19] Begjanov A.S., Shukurov Z.K., Yuldoshev B.S. Pulsating flow of stationary elastic-viscous fluids in flat-wall channel // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 401, pp. 01030.
- [20] Yan B.H., Yang Y.H. Forced convection with laminar pulsating flow in a tube // J. Heat Mass Transfer. 2011, Vol. 47, pp. 197-202.

Дата поступления
20.01.2025

Navruzov K., Shukurov Z., Fayzullaeva Z., Rashidova L. Yassi kanalda elastik qovushoq suyuqlikning nostatsionar oqimini tadqiq qilish

Annotatsiya. Ushbu maqolada elastik qovushoq suyuqliklarning yassi kanaldagi nostatsionar oqimini reologik model-lar yordamida aniqlash bilan bog'liq amaliy masalalarni yechishning analitik usullarini qo'llash va takomillashtirish masalasi ko'rib chiqiladi. Ma'lumki, aksariyat hollarda, elastik qovushoq suyuqlikning bir o'lchovli, bo'ylama oqimi uchun Maksvell modeli qo'llaniladi. Maksvell modeli yordamida reologik xususiyatga ega elastik qovushoq suyuqliklar dinamikasi bilan bog'liq jarayon-larni aniqlash masalalari Shulman-Xusidning modeli orqali o'rganilgan. Yassi kanaldagi elastik qovushoq suyuqliklarning nostatsionar harakati Shulman-Xusid modelidan foydalanib yechilgan hamda ushbu model Nyuton va Maksvell modellari-ni umumlashgan holati ekanligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Yassi kanal, elastik qovushoq suyuqlik, statsionar oqim, nostatsionar oqim, bir o'lchovli model, umumlashtirilgan model, spektr, tezlik.

Navruzov K., Shukurov Z., Fayzullayeva Z., Rashidova L. Study of unsteady flow of elastic-viscous fluid in a flat channel

Abstract. This paper addresses practical issues related to understanding the unsteady flow of viscoelastic fluids in a flat channel, utilizing the Shulman-Khusid rheological model. While the classical Maxwell model is frequently employed for analyzing the flow of viscoelastic fluids in one-dimensional space, this study explores the unsteady flow using the Shulman-Khusid model, which can be seen as a generalization of the Newtonian and Maxwellian models.

Keywords: flat channel, viscoelastic fluid, steady flow, unsteady flow, one-dimensional model, generalized model, spec-trum, flow rate.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В РЕЗКО РАСШИРЯЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ С ОТКРЫТЫМ ИСХОДНЫМ КОДОМ

¹Носирова Н.А., ²Мадалиев М.Э.

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

²Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан
E-mail: Madaliev.me2019@mail.ru, m.e.madaliev@ferpi.uz

Аннотация. В данной работе представлены результаты численного моделирования турбулентного течения в резко расширяющемся канале с использованием программной среды OpenFOAM. Для моделирования использованы модели турбулентности Спаларта-Аллареса (Spalart-Allmaras-SA) и Менгера (Shear Stress Transport-SST). Проведено сравнение характеристик течения, включая распределение скорости, напряжение Рейнольдса и других ключевых параметров. Полученные численные результаты сопоставлены с экспериментальными данными из базы NASA, что позволило провести валидацию моделей и оценить их точность. Работа демонстрирует применимость и эффективность использования моделей SA и SST для описания двухмерных течений в условиях резкого изменения геометрии канала.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, подход РАНС, модель SST, модель SA, OpenFOAM.

Введение. Моделирование турбулентных течений в сложных геометриях, таких как резко расширяющиеся каналы, является одной из ключевых задач современной вычислительной гидродинамики (CFD от англ. computational fluid dynamics). Такие задачи широко применяются в проектировании инженерных систем, где важны аэродинамические и гидродинамические характеристики, включая авиационные двигатели, газовые турбины, теплообменные аппараты и системы транспортировки жидкостей и газов. Исследование течений в резко расширяющихся каналах представляет особый интерес, так как такие конфигурации характеризуются сложными физическими процессами, включая образование отрывов потока, рециркуляционных зон и существенных градиентов давления. Эти явления оказывают значительное влияние на устойчивость системы, энергопотери и эффективность работы устройства в целом. Несмотря на широкую распространенность экспериментальных методов исследования, численные подходы в последние десятилетия стали мощным инструментом для изучения турбулентных течений. Использование CFD-технологий позволяет не только сократить затраты на проведение экспериментов, но и получить подробные данные о характеристиках течения, которые трудно измерить в реальных условиях. Однако успех численного моделирования напрямую зависит от выбора модели турбулентности, которая определяет, насколько точно можно описать сложные взаимодействия вихрей, градиентов давления и скоростей [1–4].

На сегодняшний день модель Спаларта-Аллареса (SA) и модель переноса напряжений сдвига (SST) являются двумя из наиболее используемых и проверенных подходов в задачах моделирования турбулентных течений. Модель SA считается подходящей для задач с приграничными слоями и применяется для аэродинамических расчетов. Модель SST, в свою очередь, сочетает в себе преимущества моделей $k - \omega$ и $k - \varepsilon$, что делает её универсальной и эффективной для описания турбулентных течений с зонами отрыва и сложными рециркуляциями [5–7].

Однако, несмотря на популярность этих моделей, остается необходимость валидации численных результатов, так как ни одна модель турбулентности не является универсальной. Экспериментальные данные из базы NASA предоставляют надежную основу для такого рода исследований, позволяя сопоставить численные результаты с измеренными характеристиками течения.

Целью настоящей работы является численное моделирование турбулентного течения в резко расширяющемся канале с использованием программной среды OpenFOAM. Основные задачи исследования включают:

- Анализ особенностей течения, таких как распределение скорости, напряжения Рейнольдса, давление и структура рециркуляционных зон.

- Сравнение численных результатов, полученных с использованием моделей SA [8–10] и SST [11–13], с экспериментальными данными из базы NASA [14–15].

- Оценка применимости и эффективности используемых моделей турбулентности для решения задач с резко изменяющейся геометрией канала.

Следует отметить, что представленное численное моделирование способствует более глубокому пониманию физических процессов, возникающих при изменении геометрии канала, и позволяет сформировать предварительные рекомендации по выбору модели турбулентности. Однако для окончательных выводов необходим детальный анализ результатов и их сопоставление с экспериментальными данными.

Физическая и математическая постановка задачи. Представленные данные взяты из работы Driver, D.M. и Seegmiller, H.L. [15]. Этот случай также служит тестовым примером, включённым в базу данных NASA [14], и широко применяется в рамках семинаров по моделированию турбулентных потоков. Исследуемая задача представляет собой классический пример взаимодействия турбулентного пограничного слоя с резким отклонением геометрии, что приводит к возникновению сложных гидродинамических явлений, таких как отрыв потока, формирование рециркуляционных зон и последующее его восстановление за ступенью. Число Рейнольдса, рассчитанное на основе толщины импульсного слоя перед ступенью, равно 5000, что соответствует числу Рейнольдса порядка 36 000 при расчёте с учётом высоты ступени H . Толщина пограничного слоя перед ступенью составляет приблизительно $1,5H$, что оказывает значительное влияние на динамику течения за ступенью (см. рис. 1). Отрыв потока приводит к формированию широкой зоны рециркуляции, которая играет ключевую роль в определении общей структуры течения и является важным критерием для оценки точности моделей турбулентности. Граничные условия для данной задачи, используемые в CFD-моделировании, представлены на следующем рисунке. Входные условия задаются с учётом характеристик турбулентного потока, таких как скорость, турбулентная кинетическая энергия и скорость её диссипации. При этом на выходе применяется условие постоянного давления, а на стенках канала накладываются условия прилипания.

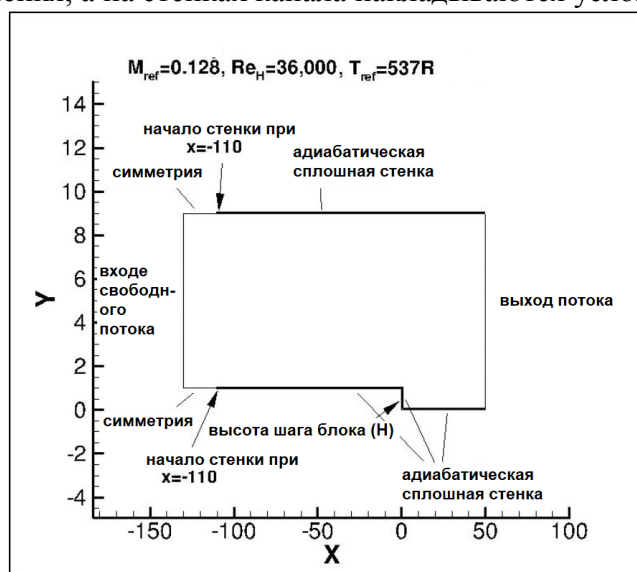


Рис.1. Физическая схема течения и граничные условия расчетной области [14]

Для численного моделирования данной задачи использована сетка, взятая из базы данных NASA - backstep5_2levdn [14], которая является стандартным тестом для моделирования турбулентных течений. Эта сетка была специально разработана для задач с резким

расширением канала и характерными особенностями турбулентных потоков, включая отрыв потока и рециркуляционные зоны.

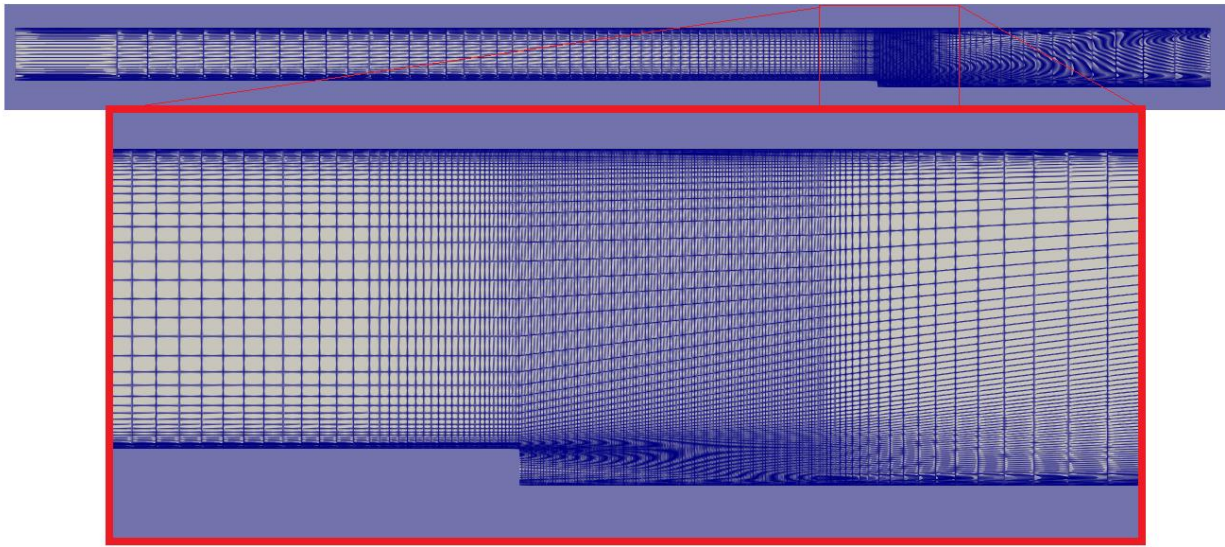


Рис. 2. Расчетная сетка для задачи

Сетка имеет структуру с высокоразрешенными узлами в области пограничного слоя и около ступени, что позволяет точно моделировать основные характеристики течения, такие как распределение скорости и напряжения Рейнольдса. Вдоль стенок канала используется минимальный размер ячеек для точного захвата эффекта прилипания потока и формирования пограничного слоя. За ступенью сетка постепенно становится более редкой, что способствует снижению вычислительных затрат в менее важных областях потока, где наблюдается слабая турбулентность. Числовая сетка содержит 81 012 узлов и имеет многослойное распределение вблизи стенок и области отрыва потока. Такое распределение сетки является необходимым для получения точных результатов в расчетах с учетом сложных градиентов скоростей и давления. Использование такой высокоразрешенной сетки в комбинации с моделями турбулентности Spalart-Allmaras (SA) и Shear Stress Transport (SST) позволяет достичь высокого качества численного решения и точности при валидации с экспериментальными данными из базы NASA [14].

Математическая модель. Для моделирования турбулентного течения в резко расширяющемся канале с использованием программной среды OpenFOAM необходимо решить систему уравнений Рейнольдса (англ. RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes)) для неизжимаемых жидкостей, с учетом моделей турбулентности. В данной задаче основными уравнениями, которые описывают динамику течения, являются:

Уравнение сохранения массы (уравнение непрерывности), которое описывает закон сохранения массы внутри расчетной области:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{V}_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса, которое описывает изменение скорости жидкости под воздействием внешних и внутренних сил:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \tau} + \rho \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \rho \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \rho \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \rho \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho \overline{g'_x g'_x}}{\partial x} - \frac{\partial \rho \overline{g'_x g'_y}}{\partial y}; \\ \rho \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \tau} + \rho \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial x} + \rho \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \rho \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \rho \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho \overline{g'_x g'_y}}{\partial x} - \frac{\partial \rho \overline{g'_y g'_y}}{\partial y}. \end{cases} \quad (2)$$

В приведенных уравнениях V_x, V_y – соответственно, продольная и поперечная составляющие вектора осредненной скорости потока, $\bar{p}$ – гидростатическое давление, ρ – плотность, $\overline{g'_x g'_x}, \overline{g'_x g'_y}, \overline{g'_y g'_x}, \overline{g'_y g'_y}$ – напряжения Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость.

В линейных моделях для определения напряжений Рейнольдса используется гипотеза Буссинеска.

$$-\rho \overline{g'_i g'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij} . \quad (3)$$

Последний член в правой части уравнения (2) представляет силу турбулентности на единицу объема, где μ_t – турбулентная динамическая вязкость, которая представляет собой пульсационную скорость жидкости. Из-за напряжений Рейнольдса количество неизвестных превышает количество уравнений RANS. Следовательно, для замыкания уравнений следует использовать модели турбулентности.

Модели турбулентности. Модель Spalart-Allmaras (SA). Модель Spalart-Allmaras (SA) является одной из моделей турбулентности, предназначенных для решения проблем в инженерной гидродинамике, где требуется вычисление турбулентных потоков. Эта модель отличается относительной простотой и эффективностью, особенно для решения задач с плоским потоком или в области близкой к стенке. Модель Spalart-Allmaras часто используется в аэродинамике и других областях, где для проектных расчетов важно быстро получить решение с достаточной точностью. Уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \hat{\nu}}{\partial \tau} + \bar{V}_x \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} + \rho \bar{V}_y \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} = C_{b1} S^T \hat{\nu} - C_{w1} f_w \left(\frac{\hat{\nu}}{l_w} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left((\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} \right) + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\hat{\nu}}} \left(\frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} \right)^2 . \quad (4)$$

Остальные значения представлены в работе [8].

Модель SST (Shear Stress Transport). Модель Shear Stress Transport (SST) – это улучшенная версия модели $k-\varepsilon$, которая сочетает в себе преимущества двух моделей турбулентности: $k-\varepsilon$ и $k-\omega$. Эта модель была разработана для того, чтобы преодолеть недостатки модели $k-\varepsilon$ в областях с сильными градиентами турбулентности, например, вблизи стенок и в областях с отрывом потока. Модель SST используется в различных областях, включая аэродинамику, гидродинамику, теплообмен и другие инженерные приложения, где необходима точная оценка турбулентных потоков с учетом всех особенностей геометрии и характеристик потока. Уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial k}{\partial x} + \rho \bar{V}_y \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left((\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho \bar{V}_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\gamma_\omega}{\nu_t} P - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (5)$$

Остальные значения представлены в работах [11–13].

Метод решения. Для решения задачи численного моделирования турбулентных течений был использован алгоритм SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), который корректирует поля скорости и давления на каждом шаге итерации для достижения сходимости при моделировании турбулентных потоков. Для давления применялся решатель GAMG с точностью $1e^{-10}$, а для переменных скорости, кинетической энергии турбулентности (k), диссипации турбулентности (ϵ) и других использовался решатель smoothSolver с методом сглаживания symGaussSeidel. Для повышения точности решения использовалась схема второго порядка (Upwind), которая более точна, чем схема

первого порядка, так как учитывает влияние градиентов переменных в соседних ячейках. Итерации продолжались до достижения точности $1e^{-6}$ для ошибок, что подтверждает точность расчетов. Кроме того, для улучшения сходимости расчетов использовались факторы релаксации: коэффициент 0.9 для скорости (U) и 0.8 для остальных переменных. Контроль остатков был установлен на $1e^{-4}$ для давления и $1e^{-5}$ для остальных переменных, что обеспечило точность и стабильность результатов.

Результаты и их обсуждение. На рис. 3 показано изменение безразмерной скорости U/U_{ref} на сечениях $x/H=1, 4$ и 6 , где U_{ref} – эталонная скорость, которая рассчитывается как максимальная скорость в расширенной части канала.

На рис. 3 можно увидеть, что результаты двух моделей различаются. На сечении $x/H=1$ результаты модели SST близки к экспериментальным данным, в то время как модель SA демонстрирует отклонения в области, расположенной близко к стенке. На сечении $x/H=4$ результаты обеих моделей совпадают друг с другом и близки к экспериментальным данным. На сечении $x/H=6$ результат модели SA близок к экспериментальным данным, в то время как в области, расположенной близко к стенке, модель SST демонстрирует небольшое отклонение.

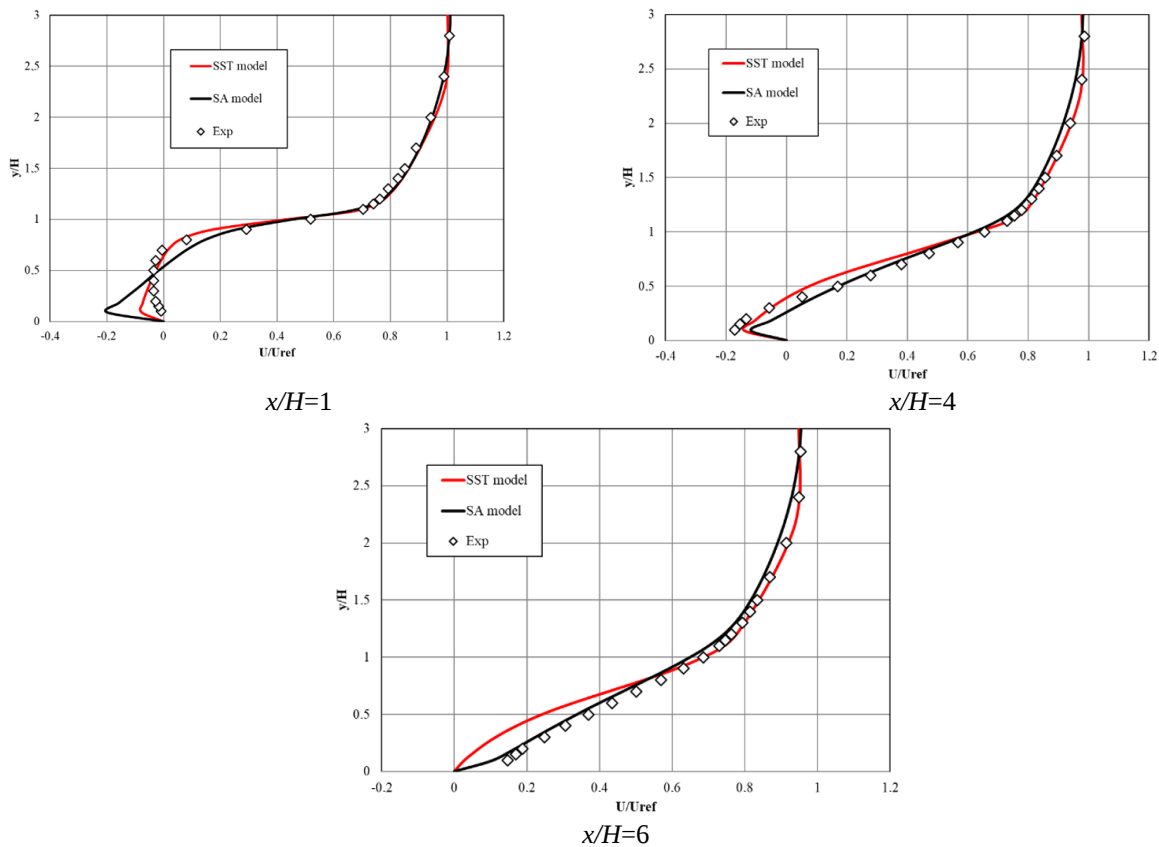


Рис. 3. Изменение безразмерной скорости U/U_{ref} на сечениях $x/H=1, 4$ и 6

На рис. 4 показано изменение поперечной скорости V/U_{ref} на сечениях $x/H=1, 4$ и 6 .

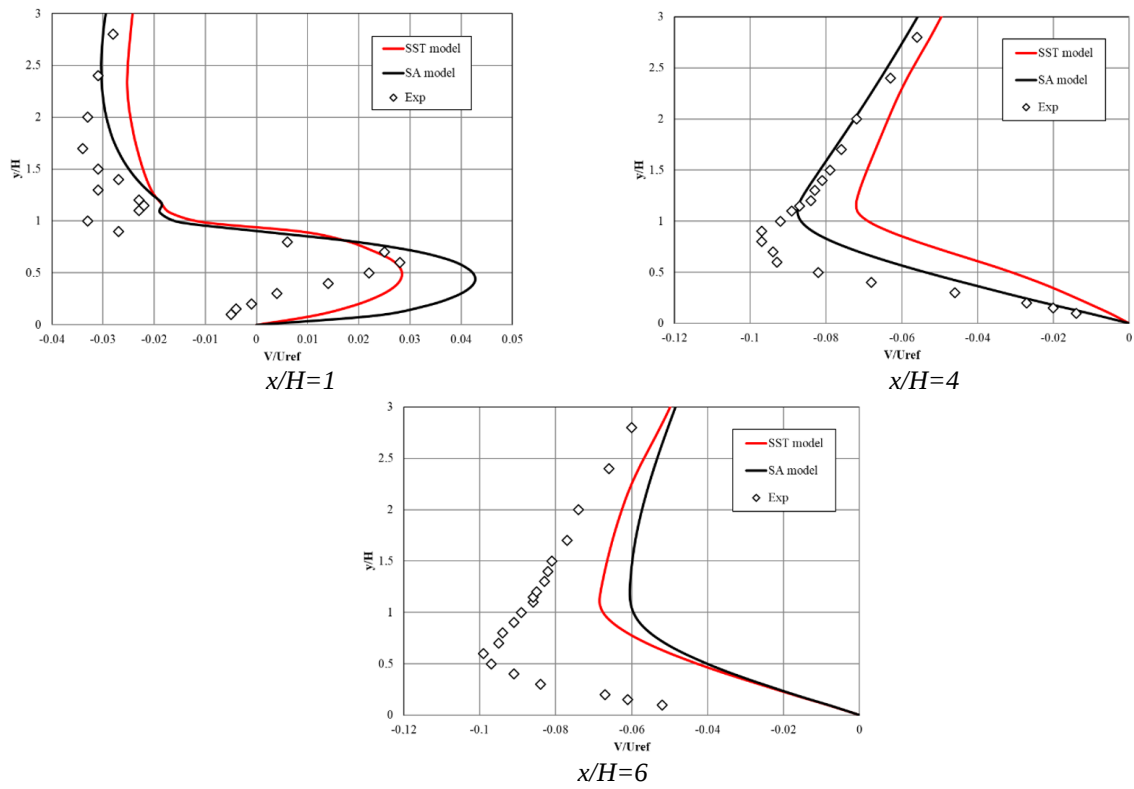


Рис. 4. Изменение безразмерной поперечной скорости V/U_{ref} на сечениях $x/H=1,4$ и 6

Как известно, поперечная скорость является весьма небольшой, и многие модели не могут адекватно её смоделировать. Это можно наблюдать на рис. 4.

На рис. 5 показано изменение напряжений Рейнольдса $1000 \overline{g'_x g'_y} / U_{ref}^2$ на сечениях $x/H=1,4$ и 6 .

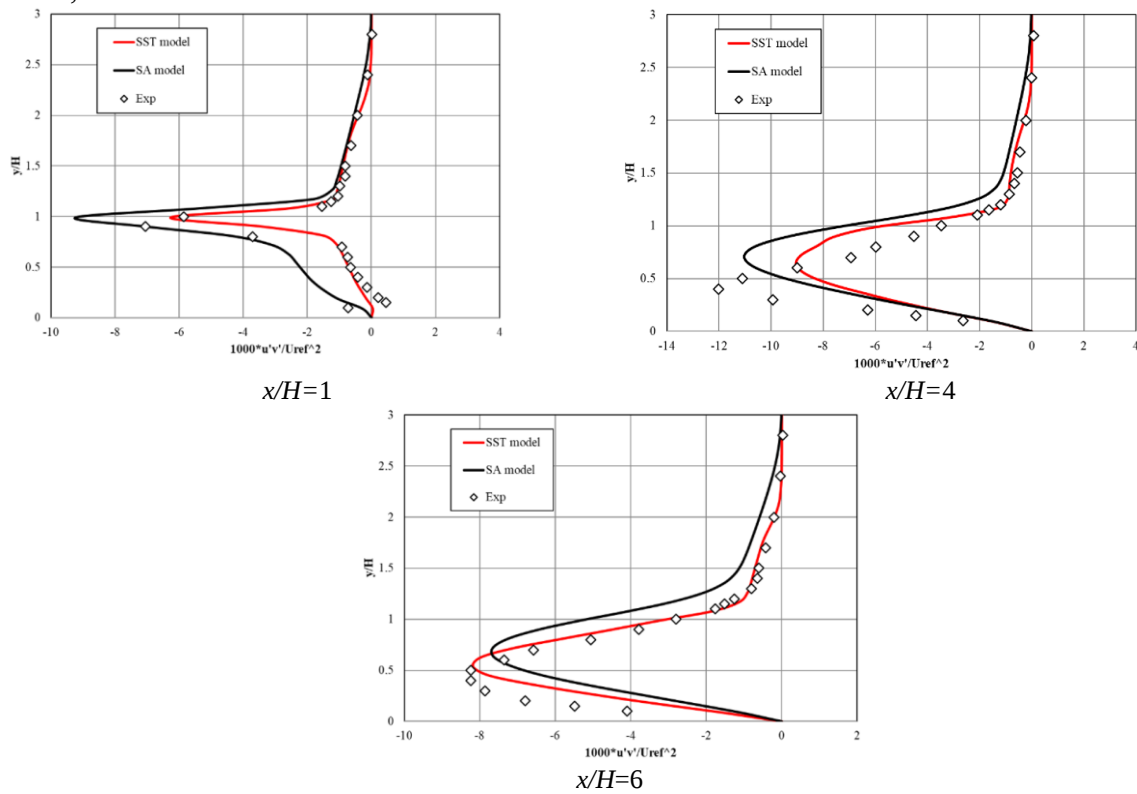


Рис. 5. Изменение напряжений Рейнольдса $1000 \overline{g'_x g'_y} / U_{ref}^2$ на сечениях $x/H=1,4$ и 6

Одной из основных проблем турбулентных моделей является трудность точного определения напряжений Рейнольдса. На рис. 5 видно, что результаты обеих моделей отклоняются от экспериментальных данных, однако они показывают значительно лучшие результаты по сравнению с моделями из базы данных NASA.

На рис. 6 показано изменение коэффициентов давления и сопротивления на нижней стенке канала. Распределение коэффициента поверхностного давления на стенке канала характеризуется изменением давления на его поверхности в зависимости от расстояния от некоторой точки.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho U_0^2},$$

где p – давление в точке на поверхности профиля, p_∞ – давление свободного потока, ρ – плотность свободного потока, U_0 – скорость свободного потока. Коэффициент давления C_p показывает, как поток взаимодействует с объектом. Если $C_p > 0$, это означает, что давление выше, чем в свободном потоке, если $C_p < 0$, то давление ниже, чем в свободном потоке. Обычно в аэродинамических объектах зоны с высоким C_p соответствуют областям с высоким давлением, таким как зоны отрыва потока или ударные волны.

Коэффициент поверхностного трения C_f определяется как отношение силы трения, действующей на поверхность профиля, к динамическому давлению свободного потока.

$$C_f = \frac{F}{0.5\rho U_0^2 S},$$

где F – сила трения, действующая на поверхность профиля, S – площадь поверхности профиля, ориентированная вдоль потока. Коэффициент сопротивления C_f используется для оценки того, сколько энергии теряется в потоке из-за сопротивления объекта. Он особенно важен для оценки аэродинамических характеристик летательных аппаратов, автомобилей и других транспортных средств.

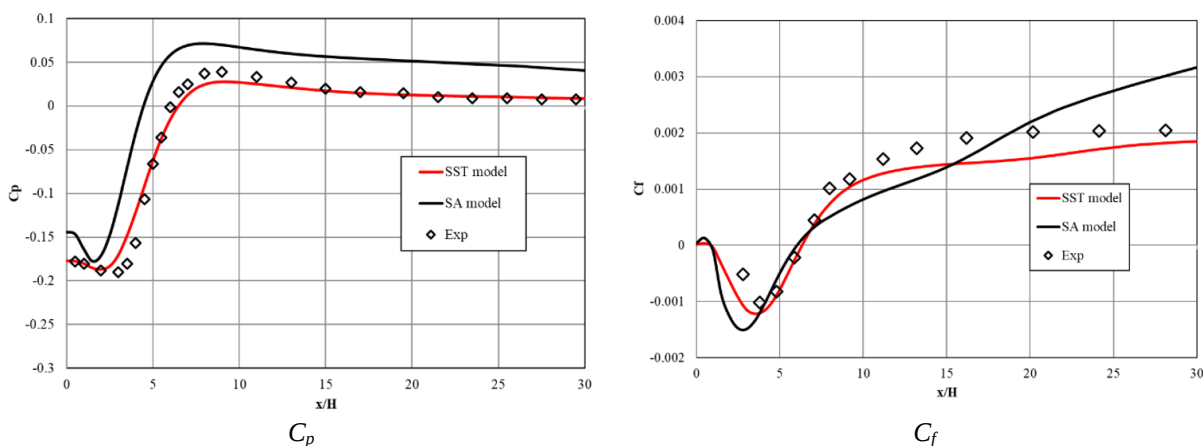


Рис. 6. Изменение коэффициентов давления и сопротивления на нижней стенке канала

На рис. 6 видно, что коэффициент давления в модели SST выражен очень точно и хорошо соответствует ожидаемым значениям. Это свидетельствует о высокой точности модели SST в описании распределения давления на поверхности канала. В то же время, результат модели SA показывает немного завышенные значения коэффициента давления, что указывает на возможные ограничения этой модели в точности предсказания давления в условиях данной задачи. Это отличие между моделями может быть связано с особенностями математического описания турбулентности, используемыми в каждой из них. Подобное поведение также наблюдается и для коэффициента сопротивления. На рисунке 6 видно, что модель SST точно выражает коэффициент сопротивления, близко соответствуя экспе-

риментальным данным, что подтверждает её высокую точность при моделировании сопротивления в данном случае. В то же время, результат модели SA демонстрирует несколько завышенные значения коэффициента сопротивления, что свидетельствует о возможных погрешностях в предсказаниях этой модели в условиях данного потока. Эти различия между моделями могут быть обусловлены особенностями каждой модели турбулентности, что подчеркивает важность выбора подходящей модели для точного описания физического процесса.

На рис. 7 показано изменение изолинии и линий тока потока.

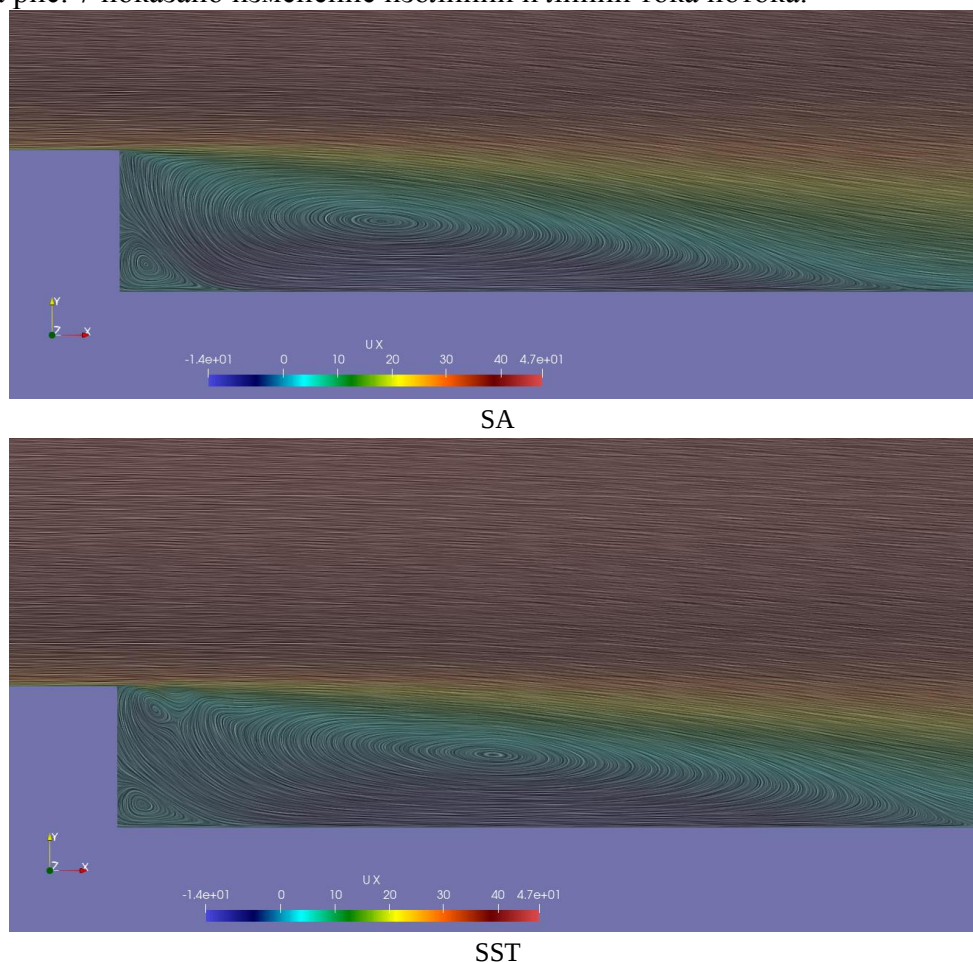


Рис. 7. Изменение изолинии и линий тока потока

На рис. 7 видно, что вихревые структуры потока моделируются обеими моделями с некоторыми различиями. Модель SST показывает более детализированное изображение вихрей, что может свидетельствовать о её лучшей способности захватывать мелкие турбулентные структуры в потоке. В то время как модель SA, хотя тоже фиксирует наличие вихрей, делает это с меньшей точностью, возможно, из-за своей ограниченной способности к детальному описанию сложных турбулентных явлений. Эти различия подчеркивают важность выбора соответствующей модели для эффективного анализа и предсказания поведения потока в различных условиях.

Заключение. В данной работе было проведено численное моделирование турбулентного течения в резко расширяющемся канале с использованием моделей турбулентности Spalart-Allmaras (SA) и Shear Stress Transport (SST) в программной среде OpenFOAM. Полученные результаты были проанализированы и сопоставлены с экспериментальными данными из базы NASA. Анализ показал, что модель SST в целом более точно описывает распределение скорости, напряжение Рейнольдса и коэффициент давления, что свидетельствует о её высокой эффективности при моделировании потока в условиях резкого изменения формы канала (например, внезапное расширение с резкой ступенью), что вызывает

сложные гидродинамические явления, такие как отрыв потока и формирование зон рециркуляции. Модель SA, в свою очередь, показала несколько завышенные значения в некоторых областях, особенно вблизи стенки канала, что указывает на её ограничения при точном описании турбулентных явлений. Также было отмечено, что обе модели показывают различные результаты при моделировании вихревых структур потока, что подчеркивает важность правильного выбора модели для точного предсказания поведения потока в реальных условиях. Таким образом, результаты работы подтверждают эффективность модели SST для описания турбулентных течений в условиях резко расширяющихся каналов, в то время как модель SA может быть менее точной в этих условиях.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hadad K., Eidi H.R., Mokhtari J. VOC level control by ventilation improvement of flexography printing room using CFD modeling // J. Appl. Comput. Mech. 2017, Vol. 3, No. 3, pp. 171-177.
- [2] Murillo W.O. et al. Analysis of a Jet Pump Performance under Different Primary Nozzle Positions and Inlet Pressures using two Approaches: One Dimensional Analytical Model and Three Dimensional CFD Simulations // J. Appl. Comput. Mech. 2020, Vol. 6 (Special Issue), pp. 1228-1244.
- [3] Lien F.S., Leschziner M.A. Modeling 2D separation from a high lift airfoil with a non-linear eddy-viscosity model and second moment closure // Aeronaut J. 1995, Vol. 99, No. 984, pp. 125-44.
- [4] Pavel E.S., Menter F.R. Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // J Turbomach. 2009, Vol. 131, No. 4, pp. 1-8.
- [5] Bradshaw P. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow // J Fluid Mech. 1969, Vol. 36, No. 1, pp. 177-91.
- [6] Howard J., Patankar S., Bordyniuk R. Flow prediction in rotating ducts using Coriolis-modified turbulence models // J Fluids Eng. 1980, Vol. 102, No. 12, pp. 456-61.
- [7] Johnston J., Halleen R., Lezius D. Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow // J Fluid Mech. 1972, Vol. 56, No. 3, pp. 533-57.
- [8] Spalart, P.R., Allmaras, S.R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // Recherche Aerospaciale. 1994, No. 1, pp. 5-21.
- [9] Spalart P. Trends in turbulence treatments // Fluids 2000 Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [10] Spalart P.R., Rumsey C.L. Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations // AIAA J. 2007, Vol. 45, No. 10, pp. 2544-2553.
- [11] Menter F.R. Zonal two-equation k- ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAAPaper. 2012, AIAA-93-2906
- [12] Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 / ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc. 2003, pp. 625 - 632.
- [13] Pasha A.A. Study of parameters affecting separation bubble size in high speed flows using k- ω turbulence model // J. Appl. Comput. Mech. 2018, Vol. 4, No. 2, pp. 95-104.
- [14] "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
- [15] Driver, D.M., Seegmiller, H.L. Features of Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow // AIAA Journal. 1985, Vol. 23, No. 2, , pp. 163-171.

Дата поступления

15.12.2024

Nosirova N.A., Madaliyev M.E. Keskin kengayuvchi kanaldagi turbulent oqimni chiziqli turbulentlik modellar asosida ochiq dasturiy platformada sonli modellash

Annotatsiya. Ushbu maqola OpenFOAM dasturiy muhitidan foydalangan holda keskin kengayadigan kanalda turbulent oqimni sonli modellash natijalarini taqdim etadi. Simulyatsiya uchun Spalart-Allmaras (SA) va Menter (Shear Stress Transport-SST) turbulentlik modellari ishlatilgan. Oqim xususiyatlarini, shu jumladan tezlikni taqsimlash, Reynolds kuchlanishi va boshqa asosiy parametrlarni taqqoslash amalga oshiriladi. Olingan sonli natijalar NASA ma'lumotlar bazasidagi eksperimental ma'lumotlar bilan taqqoslandi, bu modellarni tasdiqlash va ularning to'g'riligini baholash imkonini berdi. Ish kanal geometriyasining keskin o'zgarishi sharoitida ikki o'lchovli oqimlarni tasvirlash uchun SA va SST modellaridan foydalanishning qo'llanilishi va samaradorligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Navier-Stokes tenglamalari, RANS yondashuvi, SST modeli, SA modeli, OpenFOAM.

Nosirova N.A., Madaliyev M.E. Simulation of turbulent flow in an abruptly expanding channel using linear turbulence models in an open-source platform

Abstract. This paper presents the results of a numerical simulation of turbulent flow in an abruptly expanding channel using the OpenFOAM software environment. The Spalart-Allmaras (SA) and Menter (Shear Stress Transport-SST) turbulence models were employed for the simulation. The study examined various flow characteristics, including velocity distribution, Reynolds stress, and other key parameters, which were compared against experimental data from the NASA database. This comparison allowed for the validation of the models and an assessment of their accuracy. The findings demonstrate the effectiveness and applicability of the SA and SST models in describing two-dimensional flows subjected to sudden changes in channel geometry.

Keywords: Navier-Stokes equations, RANS approach, SST model, SA model, OpenFOAM.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ МЕНТЕРА

¹Назаров Ф.Х., ¹Абдухамидов С.К., ²Наврузов Д.П.

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан.

²Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан
E-mail: farruxnazar@mail.ru, Sardor.abdukhamidov@mail.ru, navruzov.d@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования двумерного турбулентного пограничного слоя на выпуклой поверхности с учётом кривизны. Моделирование выполнено с использованием стандартной двухуровневой модели турбулентности SST (Shear Stress Transport) в среде численного моделирования Comsol Multiphysics 6.1. Основное внимание уделено анализу течения вблизи поверхности, где влияние кривизны оказывает существенное воздействие на характеристики пограничного слоя. Для оценки достоверности численных данных выполнена их верификация путём сравнения с экспериментальными результатами, представленными в открытой базе данных NASA, что позволило провести качественную и количественную оценку точности используемой модели. При численной реализации уравнений Навье–Стокса, дополненных турбулентными членами, применён метод конечных элементов, обеспечивающий гибкость при построении сетки и возможность точного разрешения граничных условий. Известно, что при использовании метода конечных элементов для задач с выраженным конвективным переносом, могут возникать численные неустойчивости. Для обеспечения устойчивости и сходимости расчётов в работе применена схема наименьших квадратов Галёркина (GLS), а также дополнительный стабилизатор, учитывающий влияние бокового ветра, что особенно актуально для моделирования аэродинамических явлений. С целью анализа влияния качества и плотности сетки на точность результатов проведено исследование сеточной сходимости, включающее расчёты на различных типах и плотностях конечных элементов. По результатам сравнительного анализа показано, что модель турбулентности SST в среде Comsol Multiphysics 6.1 демонстрирует высокую надёжность и эффективность при моделировании турбулентного обтекания поверхностей со сложной геометрией, включая случаи с выпуклой кривизной. Данный подход может быть рекомендован для решения широкого класса инженерных задач, связанных с турбулентными потоками.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, численное моделирование, отрывное течение, модель SST, Comsol Multiphysics, стабилизация GLS, данные проверки NASA.

Введение. Вычислительная гидродинамика (Computational Fluid Dynamics, или CFD) – это наука, изучающая численные методы решения уравнений, описывающих движение жидкостей и газов. CFD используется для моделирования различных процессов в гидродинамике, таких как обтекание летательных аппаратов, турбулентные потоки, теплообмен, смешивание жидкостей и многое другое. В основе CFD лежат уравнения Навье–Стокса, которые описывают сохранение массы, импульса и энергии в жидкости или газе. Однако прямое аналитическое решение этих уравнений возможно лишь для простых геометрических форм и потоков. В большинстве случаев решение уравнений Навье–Стокса требует разбиения пространства на сетку и численного решения на каждом узле этой сетки. Численные методы CFD позволяют находить решение уравнений Навье–Стокса на всей расчетной области, учитывая граничные и начальные условия. Для этого используются методы конечных разностей, конечных элементов или конечных объемов. Применение CFD в различных инженерных областях позволяет проектировать и анализировать системы, опираясь на физические законы движения жидкостей и газов. Например, в авиационной промышленности CFD помогает оптимизировать форму крыла или фюзеляжа, снижать аэродинамическое сопротивление и повышать эффективность. Возможности CFD также применяются при проектировании автомобилей, судов, турбин, систем кондиционирования и во многих других областях. Таким образом, CFD является важной дисциплиной в инженерии, которая позволяет более эффективно проектировать и анализировать системы, связанные с движением жидкостей и газов [1–2].

Уравнения Навье–Стокса – это система дифференциальных уравнений, которые описывают движение несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}, \\ \nabla \mathbf{v} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где: $\mathbf{v}$ – вектор скорости жидкости, t – время, p – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на жидкость, ∇ – оператор набла, определяющий градиент и дивергенцию векторного поля.

Первое уравнение – уравнение движения Навье-Стокса – описывает изменение скорости жидкости во времени под воздействием внешних сил, вязкости и давления.

Второе уравнение – уравнение неразрывности – гарантирует сохранение массы жидкости.

Уравнения Навье-Стокса являются нелинейными и сложными для решения. Они широко используются для моделирования течений жидкостей в различных областях науки и техники, таких как аэродинамика, гидродинамика, океанография и др. Уравнение Навье-Стокса является математической моделью ламинарного течения. Однако многие течения являются турбулентными, поэтому необходимо моделировать уравнения Навье-Стокса так, чтобы они учитывали турбулентный характер течений.

Существует несколько подходов к моделированию турбулентности в вычислительной гидродинамике (CFD). Вот некоторые из них:

Усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS): Этот подход предполагает, что турбулентные потоки можно рассматривать как усредненное поле скорости, используя усредненные уравнения Навье-Стокса. Это один из самых популярных и широко применяемых методов, который использует различные модели турбулентности, такие как модель k - ϵ или k - ω .

Модели LES: В этом подходе турбулентность моделируется с использованием представления потока в виде набора вихрей или зарядов. Такой метод позволяет более точно учитывать особенности турбулентных структур и их взаимодействие.

Прямые численные методы (DNS): Этот метод является наиболее точным, так как решает полные уравнения Навье-Стокса в каждой точке пространства и времени без применения моделей турбулентности. Однако он требует больших вычислительных ресурсов и применим только для относительно небольших масштабов и временных интервалов.

Ламинарные модели: Хотя они непосредственно не моделируют турбулентность, ламинарные модели могут быть использованы для предсказания потоков с низким уровнем турбулентности или при отсутствии турбулентных эффектов. Это полезно в тех случаях, когда поток можно считать ламинарным.

Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и ограничения, и выбор метода зависит от конкретной задачи CFD и доступных вычислительных ресурсов. В некоторых случаях возможно комбинировать различные подходы для достижения более точных и эффективных результатов [3-4].

Наиболее распространенным подходом является метод Рейнольдса, который приводит к осредненной по Рейнольдсу системе уравнений Навье-Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS). В осредненной системе уравнений переменные потока (скорость, давление и другие) разделяются на средние значения и флуктуации. Средние значения отражают основной поток, а флуктуации – турбулентные колебания. Усредненные уравнения Навье-Стокса используются для моделирования флуктуаций с применением закрытых моделей турбулентности. Основная идея подхода RANS заключается в том, что основной поток изменяется значительно медленнее, чем турбулентные колебания, что позволяет усреднить уравнения Навье-Стокса, чтобы получить систему, описывающую средний поток. Для учета турбулентных эффектов в усредненных уравнениях используются модели турбулентности, такие как модели k - ϵ или k - ω . Однако подход Рейнольдса имеет свои ограничения, поскольку он основан на предположении о стационарности и изотропности турбулентности, а также не учитывает динамические эффекты и взаимодействия различных масштабов турбулентности. Тем не менее, благодаря своей относительной простоте и вычислительной

эффективности, метод RANS широко используется в инженерных расчетах и при проектировании различных систем и устройств.

Модель турбулентности Ментера SST (Shear Stress Transport) [5–6] является одной из самых популярных моделей в вычислительной гидродинамике (CFD). Это комбинированная модель, которая сочетает преимущества моделей k-ε и k-ω. Модель была разработана М. Ментером в 1994 году и получила широкое признание благодаря своей универсальности и надежности для различных типов потоков.

Модель Ментера SST учитывает важнейшие характеристики потока, включая области с ламинарным и турбулентным движением, а также переходные зоны. Она обладает улучшенными способностями к предсказанию течения потока в областях с высокими градиентами скорости и вблизи стенок. Модель основывается на решении уравнений для двух переменных: кинетической энергии турбулентности (k) и специфической диссипации турбулентности (ω).

Дополнительный коэффициент, называемый RANS-величиной размещения, используется для контроля переключения между двумя вкладками моделей k-ε и k-ω в зависимости от характеристик потока. В областях с быстрыми градиентами скорости и высоким уровнем турбулентности модель переключается на k-ω, а в областях с низким уровнем турбулентности – на k-ε.

Модель Ментера k-ω SST демонстрирует хорошую устойчивость и точность при предсказании различных типов потоков, включая ламинарные, переходные и турбулентные. Она широко применяется в инженерных областях, таких как авиация, автомобилестроение, энергетика и теплообмен, где точное моделирование турбулентных потоков играет важную роль в процессе проектирования [7–11].

Цель данной статьи заключается в исследовании модели турбулентности SST для задач, связанных с течением турбулентного потока в канале Convex Curvature Boundary Layer Validation Case. Полученные численные результаты сопоставляются с известными экспериментальными данными, представленными на веб-сайте NASA Turbulence Modeling Resource (TMR) [12].

SST модель турбулентности. Модель переноса касательных напряжений Ментера (SST) [5-6] является комбинированным подходом, который сочетает в себе модели k-ε и k-ω. Для описания турбулентности в пристеночном слое используется модель k-ω, а для внешней области потока – модель k-ε. Такой выбор позволяет эффективно моделировать турбулентные явления как вблизи стенок, где наблюдаются большие градиенты скорости, так и в удалённых областях, где турбулентность менее выражена.

Сегодня модель SST является одной из самых популярных в области вычислительной гидродинамики благодаря своей высокой точности и стабильности при моделировании разнообразных типов турбулентных потоков. Она интегрирована во множество коммерческих и открытых CFD-решений, таких как ANSYS Fluent, OpenFOAM и других, благодаря своей универсальности и способности точно прогнозировать поведение потока в различных инженерных задачах.

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)k = \nabla[(\nu + \sigma_k \nu_t)\nabla k] + P - \beta^* \omega k, \\ (U \cdot \nabla)\omega = \nabla[(\nu + \sigma_\omega \nu_t)\nabla \omega] + \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \nabla \omega \nabla k. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь k – удельная турбулентная кинетическая энергия (м² с⁻²), ω – удельная скорость турбулентной диссипации (с⁻¹). Остальные значения представлены в работах [5-6].

Метод решения. Для стандартной модели турбулентности SST в работе использовались стандартные решатели COMSOL Multiphysics.

2DCC: Случай проверки двумерного пограничного слоя выпуклой кривизны.

Целью здесь является предоставление случая проверки для моделей турбулентности. В отличие от проверки, которая стремится установить, что модель была реализована правильно, данная проверка сравнивает результаты CFD, пытаясь установить способность модели воспроизводить физику. Если это необходимо, здесь предоставляется большая последовательность вложенных сеток того же семейства. Данные также предоставляются для сравнения. Для этого конкретного случая «существенно несжимаемой» кривизны (из Смитса, Янга и Брэдшоу) данные взяты из экспериментов [14].

В эксперименте используется квадратный воздуховод постоянной площади высотой 0.127 м с быстрым изгибом в 30 градусов (внутренний радиус кривизны составляет 0.127 м). В эксперименте соотношение сторон воздуховода составляло 6:1.

Основное внимание в этом случае уделяется оценке моделей турбулентности для кривизны выпуклой стенки (нижней стенки в данном случае). Известно, что вблизи выпуклых стенок уровни турбулентности уменьшаются по сравнению с потоком вблизи прямых стенок. Здесь оцениваются различные модели с точки зрения их способности улавливать этот эффект. (Обратите внимание, что в этом случае также есть верхняя (вогнутая) стенка, где происходит противоположное. Вогнутая стенка дестабилизирует пограничные слои, увеличивая уровни турбулентности и толщину пограничного слоя. В вогнутой кривизне обычно образуются вихри Гёртлера. Эти вихри, как правило, квазистабильны и могут приводить к устойчивым или медленно меняющимся крупномасштабным изменениям по размаху в пограничном слое. Хотя это и не является основной целью этого случая, измерения в случае Смитса на вогнутой стенке показывают значительные изменения по размаху в трении на поверхности, согласующиеся с наличием вихрей Гёртлера. Мы предоставляем кривые для минимального и максимального трения на поверхности вдоль вогнутой стенки из эксперимента. Учитывая природу продольного потока в вогнутой кривизне, интерпретации различий между CFD и тестом в этой области должны учитывать как неопределенность в результатах теста, так и сложность захвата вихрей Гёртлера в стационарном вычислении в 3D, а также невозможность захвата их эффектов в 2D. Для этого тестового случая воздуховод моделируется в 2D. Результаты по вогнутой стенке предоставляются для руководства и сравнения между моделями, но не должны интерпретироваться как окончательный дискриминатор между моделями) (рис.1).

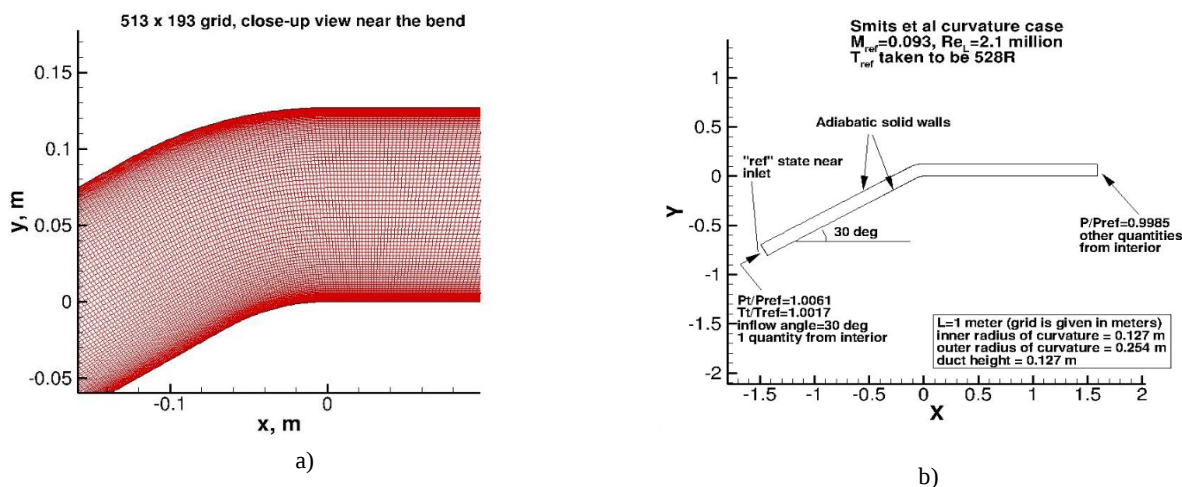


Рис. 1. Случай проверки граничного слоя с выпуклой кривизной 2D.
а) вычислительная сетка и б) граничные условия.

Скорость поступающего потока (U_{ref}) вблизи входа составляет 31.9 м/с. Обратное давление выбирается для достижения желаемого потока. Длина «пробега» вверх по потоку

выбирается для того, чтобы позволить полностью турбулентному пограничному слою развиваться естественным образом и достичь приблизительно правильной толщины пограничного слоя вверх по потоку от изгиба. Верхняя и нижняя границы моделируются как адиабатические твердые стенки. Следующий график показывает схему этого случая вместе с граничными условиями. «Pt» относится к полному давлению, «P» относится к статическому давлению, а «Tt» относится к полной температуре.

Распределение коэффициента поверхностного давления на стенке канала описывает изменение давления вдоль её поверхности в зависимости от расстояния от выбранной точки.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho U_0^2},$$

где p - давление в точке на поверхности профиля, p_∞ - давление свободного потока, ρ - плотность свободного потока, U_0 - скорость свободного потока.

Коэффициент поверхностного трения C_f определяется как отношение силы трения, действующей на поверхность профиля, к динамическому давлению свободного потока.

$$C_f = \frac{F}{0.5\rho U_0^2 S},$$

где F - сила трения, действующая на поверхность профиля, S - площадь поверхности профиля, ориентированная вдоль потока.

Ниже показаны сопоставления полученных численных результатов с известными опытными данными. На рис.2 показаны: а) зависимость коэффициента трения от давления; б) коэффициент трения нижней части канала, а также результаты эксперимента.

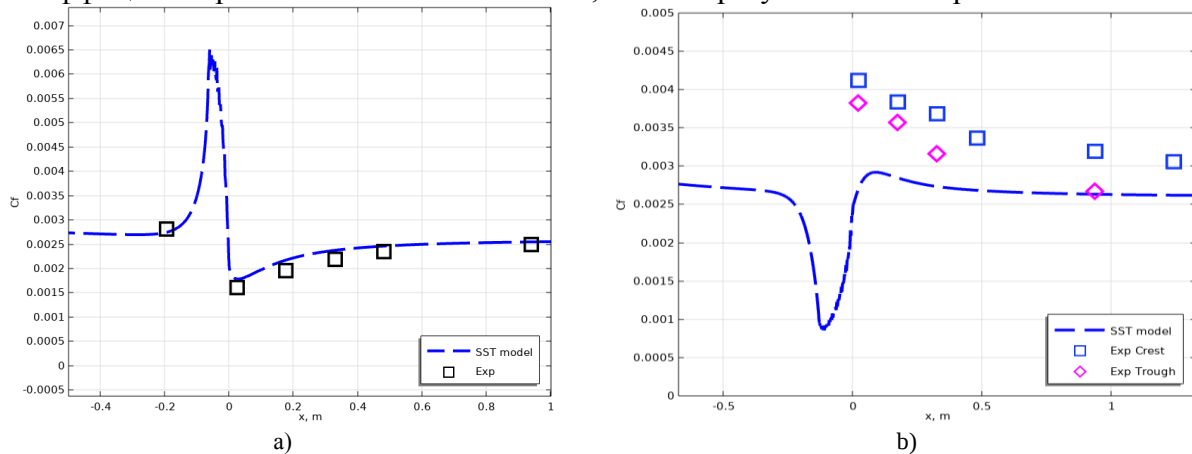


Fig.2. Зависимость коэффициента трения от давления

а) Показана зависимость коэффициента трения C_f на выпуклой (convex) стенке. Видно, что вблизи начала закругления модель SST предсказывает резкий пик, связанный с усилением градиента скорости, однако далее значения хорошо совпадают с экспериментом. б) Представлена зависимость C_f для вогнутой (concave) стенки. Здесь наблюдается снижение коэффициента трения в области минимума, что обусловлено возникновением вихревых структур (например, вихрей Гёртлера). Модель SST демонстрирует общее поведение, однако не полностью воспроизводит детали экспериментальных данных как на вершине (crest), так и в желобе (trough) кривизны.

На рис. 3-7 показаны профили продольной скорости U , профили поперечных турбулентных напряжений $\overline{u'\partial'}$, профили поперечных турбулентных напряжений $\overline{u'u'}$ и профили поперечных турбулентных напряжений $\overline{\partial'\partial'}$ вдоль нижней поверхности канала на разных сечениях по течению, соответственно.

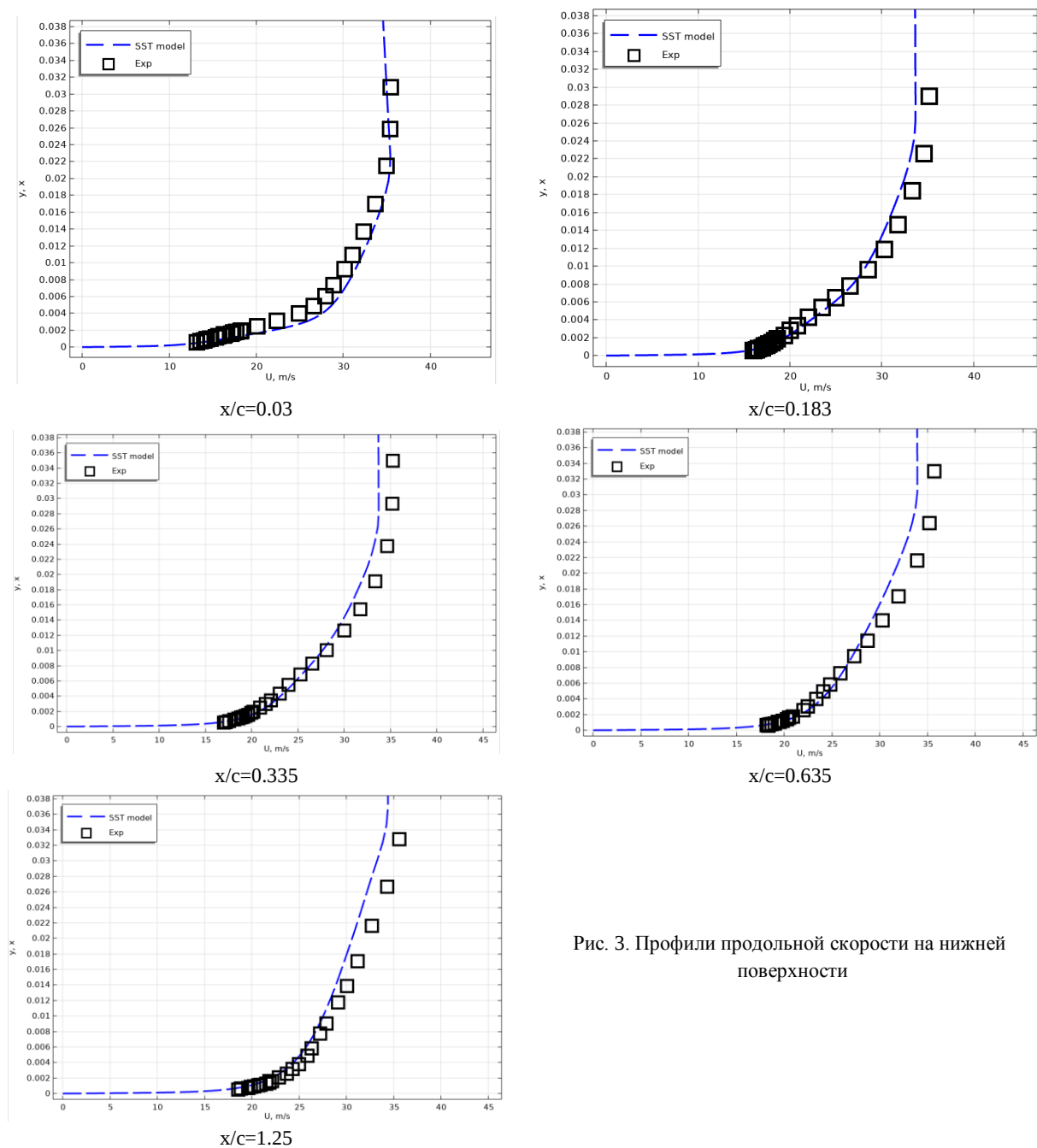


Рис. 3. Профили продольной скорости на нижней поверхности

На всех участках наблюдается хорошее соответствие между численными результатами модели SST (синяя пунктирная линия) и экспериментальными данными (черные квадраты). Особенно вблизи стенки модель адекватно предсказывает градиент скорости и форму пограничного слоя. В удалённых от стены областях имеются небольшие отклонения, однако общее поведение потока воспроизведено корректно. Это свидетельствует о высокой точности модели SST при моделировании течения вдоль криволинейных поверхностей.

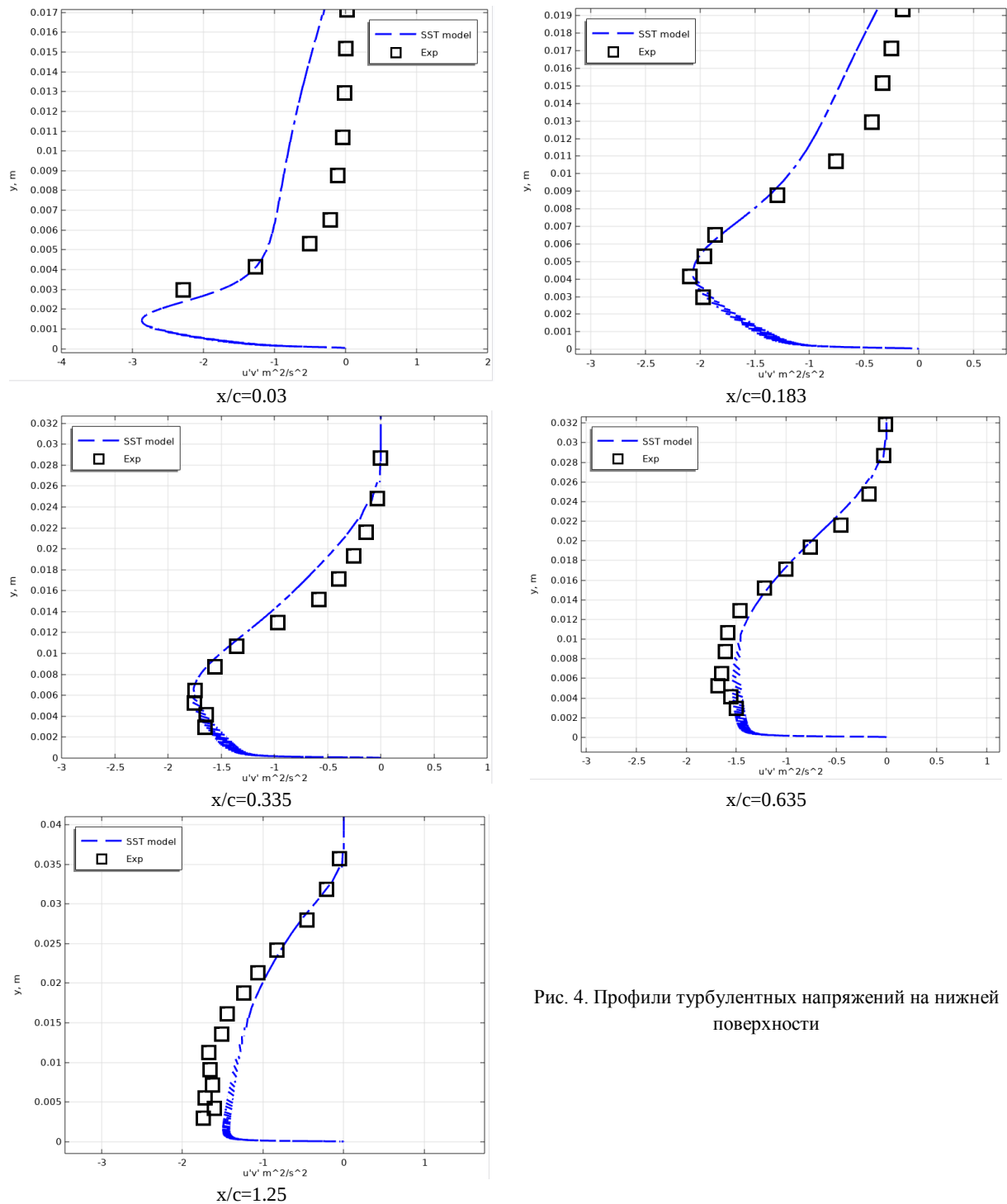


Рис. 4. Профили турбулентных напряжений на нижней поверхности

Вблизи переднего края ($x/c=0.03$) наблюдается заметное расхождение между моделью и экспериментом, что может быть связано с недостаточным развитием турбулентности в модели. Однако, начиная с $x/c=0.335$, SST модель точнее воспроизводит распределение $u'v'$, особенно вблизи пиковых значений. На участке $x/c=1.25$ наблюдается высокая степень совпадения, что свидетельствует об адекватности модели при расчетах устойчиво развитых течений.

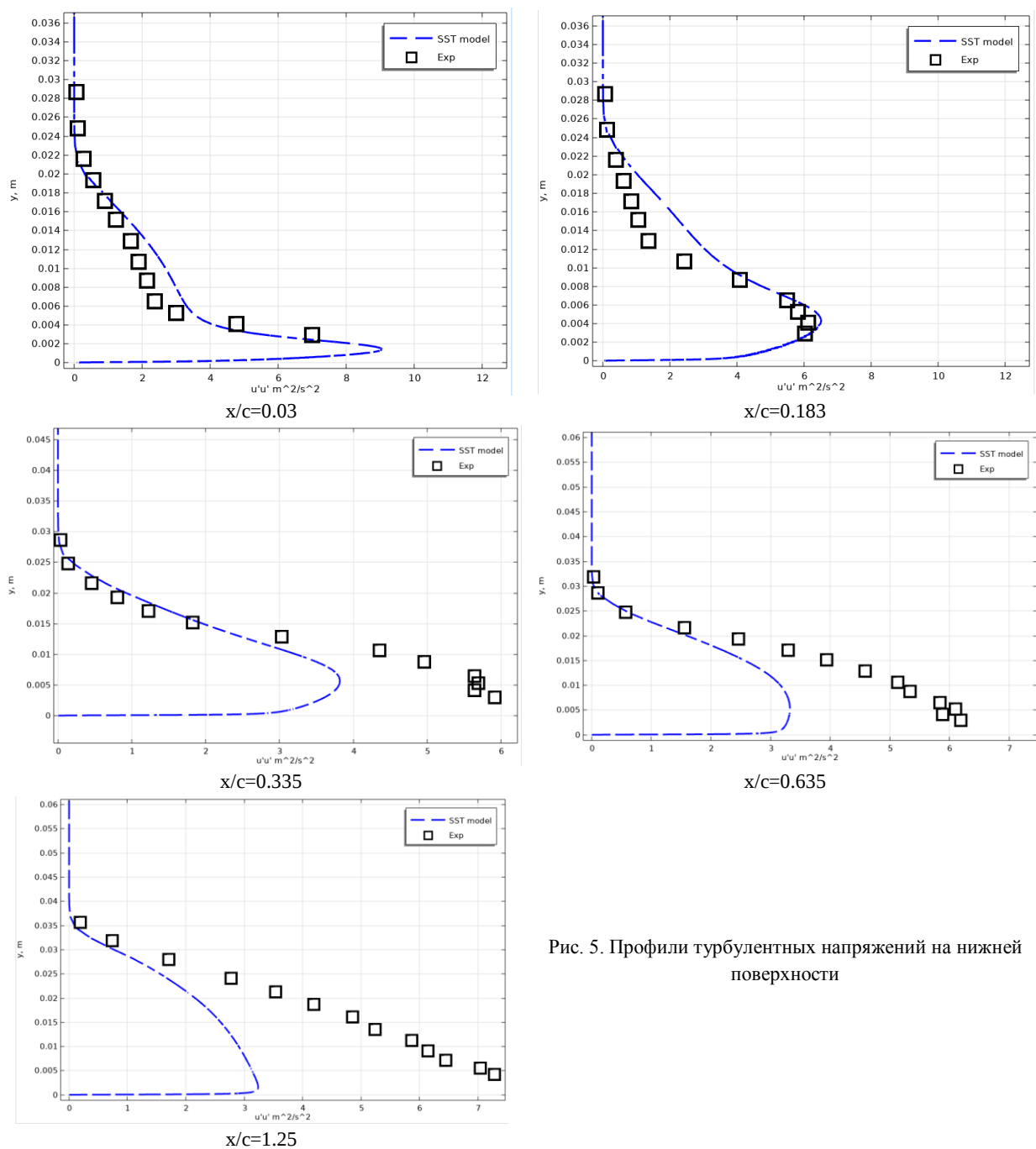


Рис. 5. Профили турбулентных напряжений на нижней поверхности

Модель SST воспроизводит общий тренд распределения u'^2 , однако завышает значения вблизи стенки на участках $x/c=0.03$ и $x/c=0.183$, что может свидетельствовать о переоценке турбулентной энергии в начальной части обтекания. Начиная с $x/c=0.335$, наблюдается улучшение согласования с экспериментом, особенно в максимальной области профиля. На более удалённых участках ($x/c=0.635$ и 1.25) модель адекватно передаёт спад напряжений вдоль нормали.

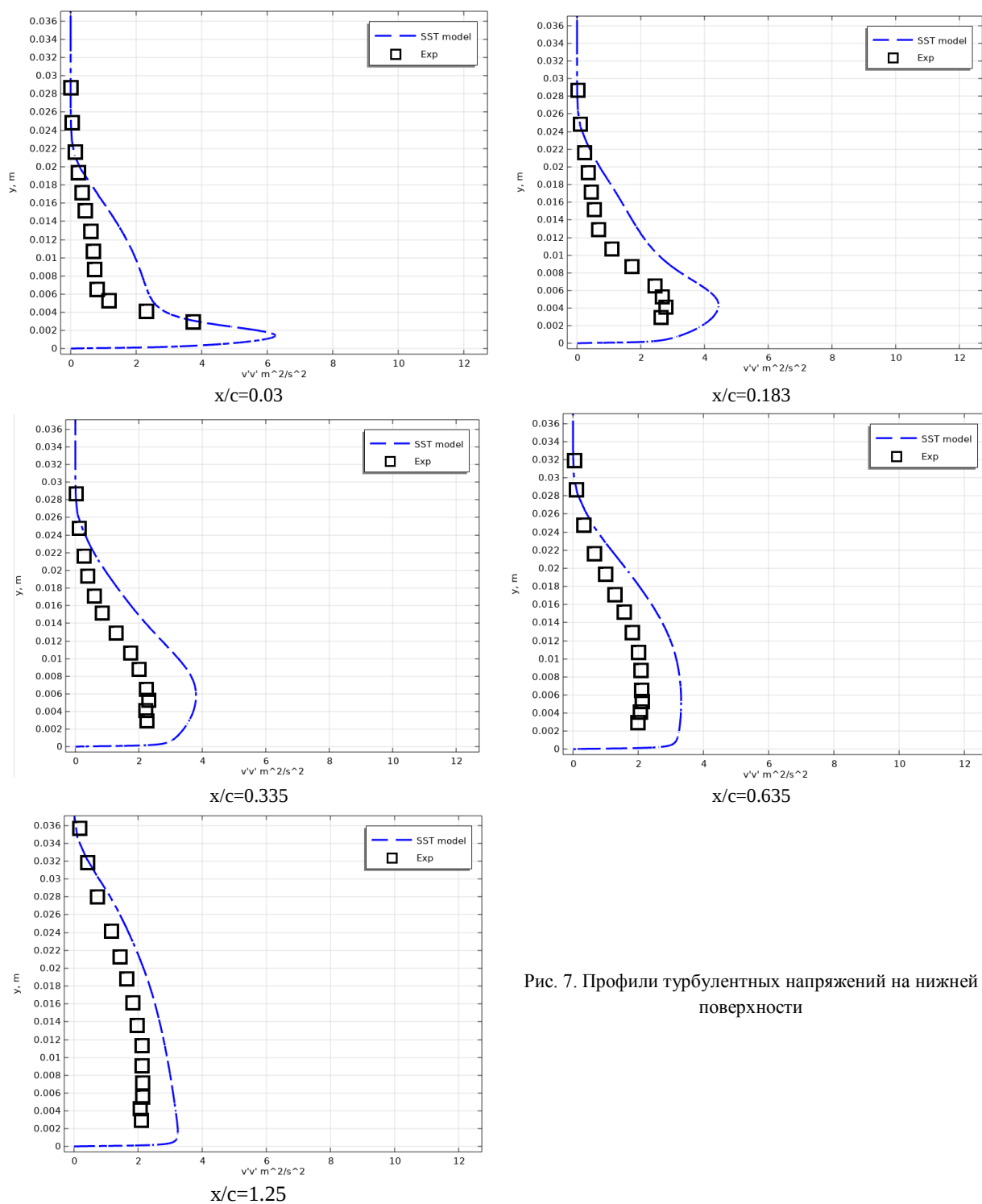


Рис. 7. Профили турбулентных напряжений на нижней поверхности

Во всех сечениях модель SST воспроизводит общий характер уменьшения v'^2 с удалением от стенки, однако переоценивает значения вблизи пика, особенно в зонах $x/c=0.03$ и 0.183 . На более развитых участках течения ($x/c=0.335$ и далее) наблюдается лучшее согласование с экспериментом. При этом модель всё ещё демонстрирует склонность к завышению интенсивности поперечных флуктуаций, что может быть связано с особенностями расчёта турбулентной энергии в SST модели.

Как видно из рисунков 3-6, результаты SST модели близки к результатам эксперимента. Чуть худшее согласование наблюдается у результатов для турбулентных напряжений.

На рис. 7 представлены изолинии скорости потока.

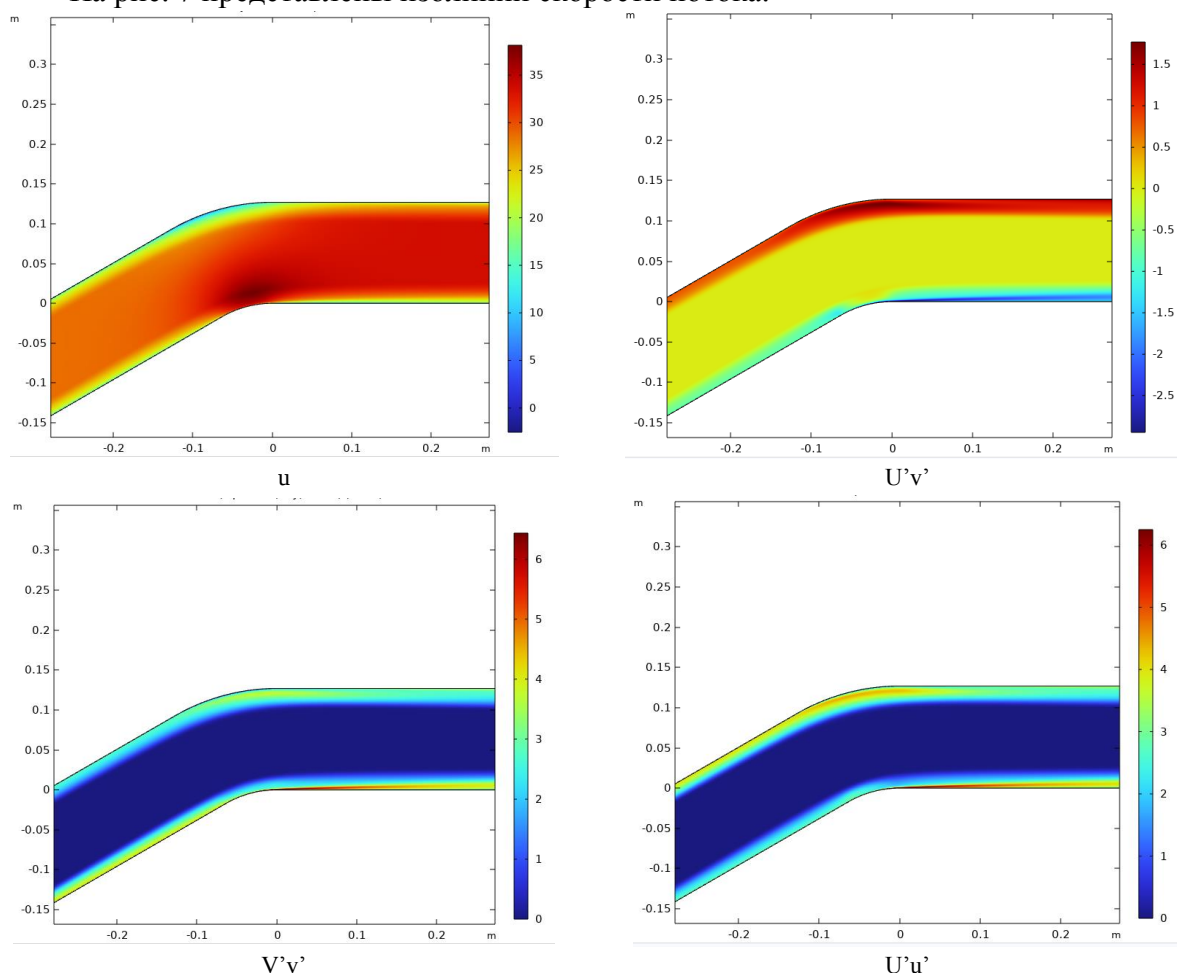


Рис. 7. Изолинии скорости канала.

Модель турбулентности SST считается одной из самых передовых на сегодняшний день, благодаря своей способности комбинировать преимущества моделей k - ϵ и k - ω . Однако, как показано на рисунках, эта модель не всегда может адекватно описывать определенные виды турбулентных течений, включая некоторые особенности отрывного (сильно турбулентного) потока. Полученные результаты указывают на то, что несмотря на высокую популярность и широкое использование модели SST в различных инженерных приложениях, существуют ограничения, которые необходимо учитывать при моделировании более сложных турбулентных явлений. Это подчеркивает необходимость дальнейших исследований и совершенствования существующих моделей для повышения их точности в сложных условиях потока.

Заключение. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования с использованием стандартной модели турбулентности SST в программной среде Comsol Multiphysics, основанной на методе конечных элементов. В качестве тестовой задачи была выбрана валидационная постановка 2D Convex Curvature Boundary Layer, широко применяемая для оценки эффективности турбулентных моделей.

Проведенный анализ показал, что модель SST демонстрирует ограниченную точность в области криволинейных пограничных слоёв с выпуклой геометрией. Полученные расхождения с экспериментальными данными свидетельствуют о возможных ограничениях модели при описании турбулентных напряжений и скоростных профилей в условиях сложной кривизны.

Тем не менее, SST-модель остаётся востребованным инструментом в инженерной практике благодаря своей устойчивости и относительной простоте. Дальнейшая калибровка

параметров модели, а также развитие гибридных подходов (например, RANS-LES) могут повысить её применимость к более широкому классу задач. Кроме того, полученные результаты подчёркивают важность обоснованного выбора модели турбулентности с учётом специфики течения и геометрических особенностей объекта.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Murillo W.O. et al. Analysis of a Jet Pump Performance under Different Primary Nozzle Positions and Inlet Pressures using two Approaches: One Dimensional Analytical Model and Three Dimensional CFD Simulations // J. Appl. Comput. Mech. 2020, 6 (Special Issue), pp. 1228-1244.
- [2] Hadad K., Eidi H.R., Mokhtari J. VOC level control by ventilation improvement of flexography printing room using CFD modeling // J. Appl. Comput. Mech. 2017, Vol. 3, No. 3, pp. 171-177.
- [3] Tsega E.G., Katiyar V.K. A numerical simulation of inspiratory airflow in human airways during exercise at sea level and at high altitude // J. Appl. Comput. Mech. 2019, Vol. 5, No. 1, pp. 70-76
- [4] Sentyabov A. V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. Investigation of turbulence models for computation of swirling flows // Thermophys. Aeromechanics. 2011, Vol. 18, No. 1, pp. 73-85.
- [5] Маликов З.М., Назаров Ф.Х. Сравнительный анализ моделей турбулентности на основе исследования нагреваемой осевой турбулентной струи // Вестник Московского государственного технического университета Н.Е. Баумана. Серия «Естественные науки». 2022, № 2 (101), стр. 22-35.
- [6] Menter F. R., Kuntz M., and Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc. 2003, pp. 625 - 632.
- [7] Pasha A.A. Study of parameters affecting separation bubble size in high speed flows using k- ω turbulence model // J. Appl. Comput. Mech. 2018, Vol. 4, No. 2, pp. 95-104.
- [8] Malikov Z.M., Madaliev M.E. NUMERICAL STUDY OF A SWIRLING TURBULENT FLOW THROUGH A CHANNEL WITH AN ABRUPT EXPANSION // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. i mekhanika. 2021, No. 72. pp. 93-101.
- [9] Malikov Z.M., Madaliev M.E. MATHEMATICAL MODELING OF A TURBULENT FLOW IN A CENTRIFUGAL SEPARATOR // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. i mekhanika. 2021, No. 71, pp. 121-138.
- [10] Madaliev M.E. Numerical Calculation of an Air Centrifugal Separator Based on the SARC Turbulence Model // J. Appl. Comput. Mech. 2020, Vol. 6, No. SI, pp. 1133-1140.
- [11] Spalart P.R., Jou, W. H., Strelets, M., and Allmaras, S. R. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach // Adv. DNS/LES. 1997, Vol. 1, pp. 137-147
- [12] "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
- [13] Seifert A., Pack L.G. Active Flow Separation Control on Wall-Mounted Hump at High Reynolds Numbers // AIAA J. 2002, Vol. 40, No. 7, pp. 1363-1372.
- [14] Smits A.J., Young S.T.B., Bradshaw P. The effect of short regions of high surface curvature on turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1979, Vol. 94, No. 2, pp. 209-242.
- [15] Spalart P., Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.
- [16] Spalart P.R., Shur, M.L. On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // Aerospace Science and Technology. 1997, Vol. 1, No. 5, 297-302.
- [17] Malikov Z. M., Nazarov F. X. Study of turbulence models for calculating a strongly swirling flow in an abrupt expanding channel // Computer Research and Modeling. 2021, T. 13, № 4, стр. 793-805.
- [18] Madaliev M. et al. Numerical study of flow around flat plate using higher-order accuracy scheme // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2023, Vol. 365, pp. 01011.
- [19] Madaliev, E., Madaliev, M., Rakhmankulov, S., Rakhmonkulova, S. Turbulent mixing of two plane flows based on the SST turbulence model // E3S Web Conf. / ed. Yekimov S., Sazonets I. 2023, Vol. 452, pp. 02012.

Дата поступления
01.05.2025

Nazarov F.X., Abduxamidov S.K., Navruzov D.P. 2D qavariq egrilik chegara qatlamini tekshirish muammosi uchun SST turbulentlik modelini o'rganish

Annotatsiya. Maqolada Comsol Multiphysics 6.1 hisoblash muhiti asosida SST (Shear Stress Transport) standart ikki tenglamali turbulentlik modeli yordamida egri (ya'ni, qavariq) sirt bo'yicha ikki o'lchamli turbulent chegaraviy qatlam oqimining sonli modellashirish natijalari taqdim etilgan. Tadqiqotning asosiy e'tibori oqimning sirtga yaqin hududini tahlil qilishga qaratilgan bo'lib, bu sohada sirt egri chizig'ining ta'siri chegaraviy qatlam xususiyatlariga sezilarli darajada ta'sir ko'rsatadi. Sonli modellashirish natijalarining ishonchligini baholash maqsadida NASA tomonidan taqdim etilgan ochiq eksperimental ma'lumotlar bazasi bilan taqqoslash orqali ularning verifikatsiyasi amalga oshirilgan. Bu esa ishlatilgan modelning aniqligini sifat va miqdoriy jihatdan baholash imkonini berdi. Navye-Stoks tenglamalarining turbulent a'zolar bilan to'ldirilgan ko'rinishi sonli yechishda chegaraviy elementlar usuli (finite element method) qo'llanilgan bo'lib, bu usul hisoblash panjarasini moslashuvchan qurish hamda chegaraviy shartlarni aniq aks ettirish imkonini beradi. Ma'lumki, kuchli konvektiv uzatishga ega masalalarda chegaraviy elementlar usuli qo'llanganda sonli bebarqarorlik muammolari yuzaga kelishi mumkin. Shu sababli, hisoblashlarning barqarorligi va yaqinlashuvini ta'minlash uchun Galerkindan foydalanilgan eng kichik kvadratlar usuli (GLS) va yonlama shamol ta'sirini inobatga oluvchi qo'shimcha stabilizator joriy etilgan. Bu ayniqsa aerodinamik hodisalarni modellashirishda dolzarb ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, panjara zichligi va sifatining natijalarga ta'sirini o'rganish maqsadida panjara yaqinlashuv

(grid convergence) tahlili olib borilgan. Bu jarayonda turli zichlikdagi va turdagi tugunli elementlar asosida hisob-kitoblar bajarilgan. Olib borilgan taqqoslovchi tahlil natijalariga ko'ra, Comsol Multiphysics 6.1 muhitida SST turbulentlik modeli yordamida egri sirt bo'yicha turbulent oqimlarni modellashtirish yuqori ishonchlilik va samaradorlikni ko'rsatdi. Ushbu yondashuv murakkab geometriyaga ega sirtlar atrofida oqimlar modellashtiriladigan keng turdagi muhandislik masalalarini hal qilishda tavsiya etilishi mumkin.

Kalit so'zlar: Navier-Stokes tenglamalari, raqamli modellashtirish, ajratilgan oqim, SST modeli, Comsol Multiphysics, GLS stabilizatsiyasi, NASA tekshirish ma'lumotlari.

Nazarov F.Kh, Abdukhmidov S.K., Navruzov D.P. Numerical simulation of a boundary layer on a convex surface using the Menter turbulence model

Abstract. This paper presents the results of numerical modeling of a two-dimensional turbulent boundary layer on a convex surface, taking into account curvature. The modeling was performed using the standard two-level turbulence model SST (Shear Stress Transport) in the numerical modeling environment Comsol Multiphysics 6.1. The study focuses on the analysis of the flow near the surface, where the effect of curvature has a significant impact on the boundary layer characteristics. To assess the reliability of the numerical data, they were verified by comparing them with the experimental results presented in the open NASA database, which made it possible to qualitatively and quantitatively assess the accuracy of the model used. In the numerical implementation of the Navier-Stokes equations supplemented with turbulent terms, the finite element method was used, which provides flexibility in constructing the grid and the ability to accurately resolve boundary conditions. It is known that when using the finite element method for problems with pronounced convective transport, numerical instabilities may occur. To ensure stability and convergence of calculations, the Galerkin least squares (GLS) scheme was used, as well as an additional stabilizer that takes into account the influence of the crosswind, which is especially important for modeling aerodynamic phenomena. To analyze the influence of the grid quality and density on the accuracy of results, a study of grid convergence was conducted, including calculations on various types and densities of finite elements. According to the results of the comparative analysis, it is shown that the SST turbulence model in the Comsol Multiphysics 6.1 environment demonstrates high reliability and efficiency in modeling turbulent flow around surfaces with complex geometry, including cases with convex curvature. This approach can be recommended for solving a wide class of engineering problems related to turbulent flows.

Keywords: Navier-Stokes equations, numerical modeling, separated flow, SST model, Comsol Multiphysics, GLS stabilization, NASA verification data.

УДК 631.358:633.51

ОПЕРЕЖЕНИЕ ШПИНДЕЛЬНОГО БАРАБАНА И СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ХЛОПКОУБОРОЧНОЙ МАШИНЫ

Ризаев А.А., Джураева Н.Б.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

E-mail: rizayev52@mail.ru; nargiza.1968@mail.ru

Аннотация. Опережение как отношение окружной скорости шпиндельного барабана к скорости движения машины является одним из основных кинематических параметров уборочного аппарата, установленного на мобильном основании. В статье рассмотрены результаты разработанных методов определения опережения барабана, направленных на обеспечение эффективности работы хлопкоуборочной машины. При этом основными критериями выбора опережения барабана были минимум перемещения внутреннего конца горизонтального шпинделя во время сбора хлопка или обеспечение достаточного активного состояния вертикального шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата. В дополнение к этим работам здесь для определения опережения барабана и скорости вертикально шпиндельной хлопкоуборочной машины критерием расчета принята критическая скорость захвата и наматывания хлопка шпинделем при взаимодействии с раскрытой коробочкой, сжатой между барабанами. На основе среды программирования Mathcad-15 построены графики изменения скорости движения машины в зависимости от параметров хлопковой коробочки и уборочного аппарата во время сбора хлопка машиной.

Ключевые слова: хлопкоуборочная машина, шпиндельный барабан, опережение, шпиндель, хлопок, критическая скорость.

Введение. Разработка метода расчета и определение оптимального значения отношения линейной скорости ротационного рабочего органа (в виде мотовила, фрезы, диска, барабана), взаимодействующего с обрабатываемым объектом, к скорости машины, остаются актуальными вопросами при проектировании и создании сельхозтехники. Данное отношение, называемое коэффициентом опережения, является кинематическим параметром машины и его исследованию посвящено достаточное количество работ [1-5], так как при прочих равных условиях, от него зависят производительность и качество работы машины.

Так, при уборке урожая хлопчатника хлопкоуборочными машинами от опережения барабана зависит эффективность технологических процессов в шпиндельных уборочных

аппаратах и производительность работы. По конструктивному исполнению и принципу взаимодействия рабочего органа - шпинделя с растением хлопчатника уборочные аппараты подразделяются на горизонтально и вертикально шпиндельные. Ими оснащаются навесные или самоходные хлопкоуборочные машины.

Как известно, кинематический параметр – коэффициент опережения, определяется как отношение окружной скорости шпиндельного барабана к скорости движения хлопкоуборочной машины в виде [6-8]:

$$K = \frac{U}{V} = \frac{R \cdot \omega}{V}, \quad (1)$$

где K - коэффициент опережения барабана; U – окружная скорость барабана, рассчитываемая по формуле $U=R \cdot \omega$, м/с (R – радиус окружности барабана, на котором расположены шпиндели или кассеты со шпинделями, м; ω – угловая скорость барабана, с⁻¹); V – рабочая скорость движения хлопкоуборочной машины, м/с.

Эффективность и качество работы хлопкоуборочной машины зависят от каждого параметра, входящего в правую часть формулы (1). Окружная скорость барабана прямо пропорциональна радиусу барабана R , который взаимосвязан с шириной междурядья посева хлопчатника (60, 76, 90 см, и более), а угловая скорость вращения ω характеризует взаимодействие барабана с кустовой массой хлопчатника во время сбора хлопка, активность шпинделя в рабочей камере аппарата, наматывание хлопка на шпиндель и транспортировку его вместе с барабаном из зоны сбора в зону съема хлопка со шпинделя. Со скоростью движения машины V взаимосвязаны производительность работы, количество и качество сбора (потери хлопка на кустах и на земле) и другое.

В технологических процессах шпиндельных (горизонтальных и вертикальных) уборочных аппаратов опережение барабана занимает особое место. Основателем теории активности шпинделя М.В. Сабликовым [6] разработана модель расчета коэффициента опережения барабана горизонтально-шпиндельного уборочного аппарата в виде трансцендентного уравнения:

$$K \cos \varphi_0 + \sqrt{K^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{K} + \varphi_0 - \pi = 0, \quad (2)$$

где K – коэффициент опережения барабана; φ_0 – центральный угол поворота барабана, определяющий вход кассеты со шпинделями в рабочую камеру (зону сбора хлопка) аппарата, рад ($\pi = 3.14$ рад).

Из условия наименьшего перемещения внутренних концов шпинделя в направлении ряда посева хлопчатника решением данного уравнения способом линейной интерполяции можно обеспечить синхронизацию движения шпинделей в кассетах со скоростью движения хлопкоуборочной машины. Эта рекомендация автора реализована на современных горизонтально шпиндельных машинах [8, 9].

В статье [9] специалистами из КНР рассмотрен выбор рациональной величины ширины W петли на траектории конца горизонтального шпинделя в зависимости от коэффициента опережения барабана $K = \omega_0 R/V$ (здесь ω_0 – угловая скорость барабана, с⁻¹; V – рабочая скорость машины, м/с). Построив функциональную зависимость $W = W(K)$ в виде параболы, ими рекомендованы рациональные значения равные $W = 46-48$ мм при $K = 1.0-1.3$. Теоретическими и экспериментальными исследованиями были определены оптимальные значения скорости машины 6.17 км/час (1.7 м/с), опережение барабана $K = 1.3$ и угловая скорость барабана $\omega_0 = 136$ об/мин.

В этих исследованиях для горизонтально-шпиндельной хлопкоуборочной машины опережение барабана рассмотрено с точки зрения кинематики уборочного аппарата. Следует отметить, что значения $W = 46 - 48$ мм соответствуют условному диаметру раскрытой коробочки в пределах $D_k = 56 - 58$ мм. Эти размеры согласуются с нашими исследованиями,

где была доказана надежность захвата хлопка шпинделем за счет обеспечения деформации раскрытой коробочки до 30% от ее объема [10, 11].

Исследованию влияния опережения барабанов вертикально-шпиндельного уборочного аппарата на показатели машины были посвящены работы ряда ученых и специалистов [12-16].

На рис.1 показаны сечения по горизонтальной плоскости парно расположенных шпиндельных барабанов 1, шпинделя 2, съемника 3, центры барабанов O_6 и O_6' с указанием векторов скоростей $\vec{V}$ машины, барабана $\vec{U}$, его абсолютной скорости $\vec{V}_a$, угловые скорости вращения шпинделей в зоне сбора хлопка $\omega_{ш}$ и в зоне съема $\omega_{ш'}$, съемников ω_c , барабанов ω , а также углы поворотов φ_1 , φ_2 барабанов. Геометрические параметры следующие: R – радиус барабана по центрам расположения шпинделей с радиусом r , расстояние между поверхностями шпинделей B_1 , B_2 , ширина рабочей щели b , шаг между шпинделями t , центральный угол между шпинделями 2γ , мгновенный центр вращения барабана - P . Взаимосвязь между активной поверхностью шпинделя, совершающего гипо или эпициклические вращения в рабочей камере аппарата с заданными скоростями барабана и машины, рассмотрена в работе [6]. Численные исследования позволили автору заключить, что активная поверхность во время гипоциклического вращения шпинделя достигает наибольшей величины при $K = 0.707$. Кроме этого «важно, чтобы эта поверхность была расположена на месте наибольшего прижатия коробочек к шпинделю», далее констатировано «уменьшение K не может дать того эффекта, который можно было ожидать, имея в виду только увеличение активной части поверхности шпинделя».

Вследствие гипоциклического вращения шпинделя (против направления вращения барабана) в зоне сбора хлопка (рабочая камера) в многочисленных опытах, проведенных в «БМКБ-Агромаш» (ранее ГСКБ по хлопкоуборке) и НИИМСХ (механизация сельского хозяйства), влияние K на агротехнические показатели давали неопределенные данные, что отмечено в работах [6, 12].

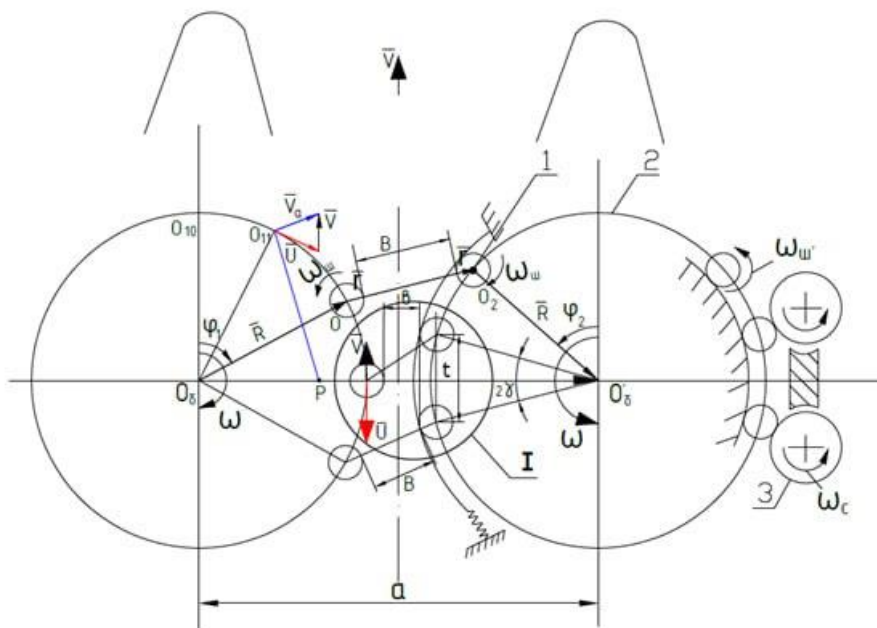


Рис. 1. Расчетная схема парно расположенных шпиндельных барабанов

Последующие исследования по совершенствованию технологического процесса в вертикально-шпиндельных аппаратах за счет разработки новых конструктивных решений

в виде многократного воздействия на раскрытие хлопчатника парными шпиндельными барабанами (3-х кратная и многократная обработка хлопчатника МОКХ) позволили определить значения K в пределах 1.3 – 1.7 [12-19].

Испытания машины ХММ-02 (аппараты МОКХ) в полевых условиях при выращивании хлопчатника по капельной технологии и урожайности хлопчатника более 42 ц/га показали полноту сбора на уровне 94.32%, что на 2.09% меньше чем, у John Deere 9920 [12].

Теоретико-экспериментальными исследованиями уборочного аппарата с механизмом завода кустов хлопчатника (МЗК) на передних парных барабанах было установлено оптимальное значение опережения равное $K \leq 1.53$ [18-20].

Исходя из выше отмеченного анализа, следует заключить, что опережение барабана уборочного аппарата теоретически изучено только с точки зрения кинематики хлопкоуборочной машины без учета физико-механических свойств хлопка, то есть без учета его критической скорости захвата и наматывания. Эксперименты были направлены на получение конечного результата: полноты сбора, сбивания на землю хлопка и курака, а также производительности работы машины.

Постановка задачи. Фронтальное положение активной поверхности шпинделя (напротив коробочки хлопчатника) и результаты опытов, проведенных в НИИМСХ [13], позволили О.С. Джаббару [15] установить связь между опережением барабана и активным состоянием поверхности шпинделя:

$$K \leq \frac{R}{\sqrt{R^2 - [(i-1)r \sin \beta]^2}}, \quad (3)$$

а также рассчитать скорость движения машины:

$$V \geq \sqrt{U^2 - r^2 \Omega^2 \sin^2 \beta}, \quad (4)$$

где i – передаточное отношение между барабаном и приводным роликом шпинделя, которое равно:

$$i = \omega_u / \omega, \quad (5)$$

где ω_u – угловая скорость вращения шпинделя, c^{-1} ; r – радиус шпинделя, мм; Ω – абсолютная угловая скорость вращения шпинделя $\Omega = (i \pm 1) \cdot \omega$, c^{-1} , (знак «+» при эпи и «-» при гипоциклических вращениях шпинделя); β – угол между касательной к окружности сечения шпинделя и прямой, определяющей предельную наружную границу активности зуба шпинделя, рад.

На основе (3), (4) были рассчитаны пределы изменения коэффициента опережения барабана $1.2 \leq K \leq 1.7$ и скорости движения машины V , которая должна изменяться в пределах 0.915–1.29 м/с для традиционной технологической схемы работы уборочного аппарата. Формула (4) связывает активность шпинделя ($r \cdot \Omega \cdot \sin \beta$) со скоростями барабана U и машины V , но при расчете нижней границы V допущена ошибка, связанная с неточным определением значения Ω .

Наши расчеты на основе (4) и (5) показали, что при гипоциклическом вращении шпинделя в рабочей камере аппарата, значение $V \geq 0.615$ м/с и при эпициклическом его движении - $V \geq 1.129$ м/с.

Как было отмечено выше кинематические параметры (режим функционирования) хлопкоуборочной машины со шпиндельными аппаратами взаимосвязаны опережениями барабанов, которые рассчитываются по формуле (1). Но при сборе хлопка (захват и наматывание дольки на шпиндель) скоростные режимы шпиндельного барабана должны быть взаимосвязаны с физико-механическими свойствами хлопка и особенно с его деформацией и критической скоростью извлечения из коробочки.

В исследованиях, проведенных Д.М. Шполянским [13] и Н.Н. Омоновым [20], было установлено, что «критерием оценки технологического процесса существующей схемы привода вертикально-шпиндельных хлопкоуборочных машин может служить скорость извлечения дольки из коробочки, далее эксперименты показали, что при больших скоростях более, чем 2 м/с, резко возрастают случаи разрыва хлопка при извлечении».

В технологической схеме вертикально-шпиндельного аппарата кинематические параметры шпинделя ($\omega_{ш}, \Omega, \bar{v}_a$), барабана (ω, U) и машины (V) взаимосвязаны с приводными передаточными механизмами, которые получают движение от трансмиссий трактора [8, 12-17].

Поэтому в статье рассматривается опережение парно расположенных барабанов с учетом свойств хлопка, извлекаемого из коробочки, его деформации во время захвата и предельной (критической) скорости наматывания на шпиндель.

Материалы, методы и объект исследования. Проведен аналитический обзор известных работ по исследованию влияния коэффициента опережения барабана на показатели хлопкоуборочной машины. Выполнено исследование кинематики твердого тела (шпинделя), совершающего плоскопараллельное вращательное движение и взаимодействующего с объемно деформируемой коробочкой хлопчатника при сжатии между шпиндельными барабанами. Разработан уточненный метод расчета коэффициента опережения барабана, включающий критическую скорость извлечения хлопка из коробочки и скорость движения машины, и удовлетворяющий условию безразрывности дольки во время сбора хлопка вертикально-шпиндельным уборочным аппаратом. Объект исследования – парно расположенные шпиндельные барабаны и объемно деформируемая коробочка.

Результаты и обсуждения. Одним из основных условий при определении опережения барабана является обеспечение естественного (вертикального) состояния растения хлопчатника во время прохождения через рабочую камеру уборочного аппарата. При этом высота, ширина и частота посадки кустов вдоль рядка посева хлопчатника, а также его влажность напрямую влияют на его изгиб в рабочей камере аппарата. Поэтому высота рабочей камеры аппарата должна соответствовать высоте куста. Эксперименты показали, что при прямом входе куста в рабочую камеру, когда были удалены входные кустонаправители аппарата «появляется небольшой наклон, вызываемый воздействием только шпиндельных барабанов» [13]. И это является следствием гипоциклического вращения шпинделя в серийном уборочном аппарате. Разрабатываемый аппарат [21] направлен на устранение этого «наклона» за счет обеспечения рационального опережения барабанов, и эпициклического вращения шпинделей.

Как известно из [6], при эпициклическом вращении шпинделя в рабочей камере активная поверхность шпинделя, при заданном коэффициенте опережения K , направлена в сторону растения, т.е., обеспечивается условие фронтальности активной поверхности шпинделя при входе в рабочую камеру. При этом повышается вероятность захвата хлопка шпинделем из коробочки, сжатой между барабанами. На рис. 2 в соответствии с [11] показаны схемы деформации сжатия коробочки хлопчатника между парно расположенными шпиндельными барабанами в трех проекциях: горизонтальной (а), вертикальной (б) и профильной (с) в рабочей камере аппарата. Как известно [16, 17, 19], во время взаимодействия шпинделей с раскрытой коробочкой только при определенном необходимом значении ее деформации Δ осуществляется захват и дальнейшее наматывание хлопка на шпиндель. Данный процесс с учетом допущений (ветки куста хлопчатника не показаны) отражен на схеме. Здесь D_k – диаметр раскрытой коробочки. Участки деформации коробочки заштрихованы. Геометрические параметры соответствуют рис.1.

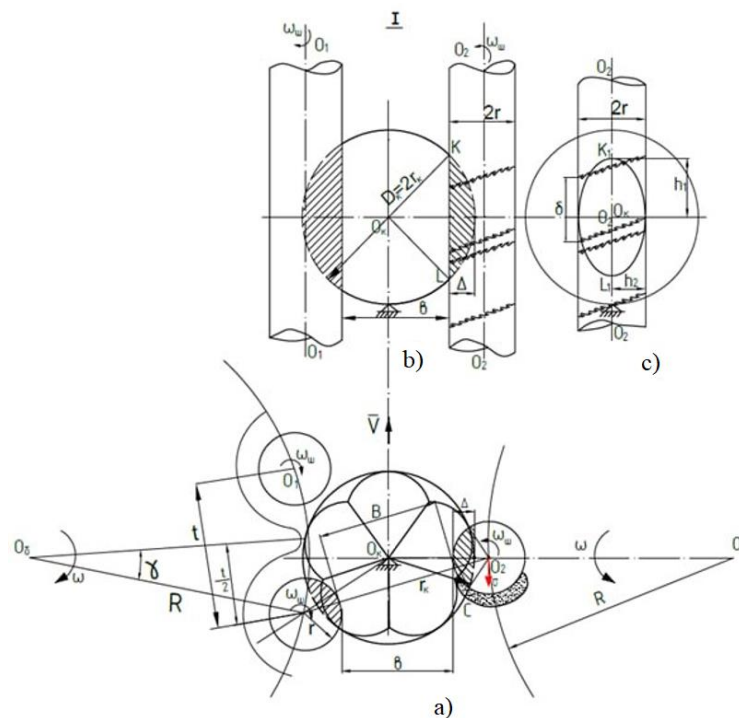


Рис. 2. Схема объемно деформированной коробочки хлопчатника между парно расположенными шпиндельными барабанами

С целью унификации конструкции разрабатываемого аппарата [21] с серийной и успешного осуществления технологического процесса сбора хлопка с учетом неразрывности извлечения дольки шпинделем, опережение шпиндельного барабана относительно скорости машины следует определить по критерию критической скорости извлечения $V_{кр}$ хлопка из коробочки хлопчатника. Критическая скорость извлечения $V_{кр}$ дольки из коробочки без ее разрыва должна быть больше или равна линейной скорости вращения шпинделя. Это условие записывается в следующем виде [13]:

$$\omega_u r \leq V_{кр} . \quad (6)$$

По опытным данным $V_{кр}$ изменяется в пределах 1.60 – 2.1 м/с [13, 16, 17, 20].

При заданном радиусе окружности сечения шпинделя r , исходя из (6), его угловую скорость во время извлечения и наматывания дольки хлопка из коробочки следует определять, как [13, 21]:

$$\omega_u \leq V_{кр} / r . \quad (7)$$

Вследствие жесткой кинематической связи между приводными механизмами в аппарате, угловую скорость барабана (водило) при известной из (7) скорости вращения шпинделя (сателлит планетарной передачи) можно определить, исходя из (5), (6) и (7) по следующей формуле:

$$\omega = \frac{r_r \cdot \omega_u}{R} = \frac{r_r \cdot V_{кр}}{R \cdot r} = \frac{V_{кр}}{\lambda \cdot R_0} , \quad (8)$$

где $\lambda = r/r_r$ – соотношение между радиусами шпинделя и его приводного ролика, который катится по неподвижным дугам центрального или коронного колеса планетарного привода шпинделя на барабане.

Зная ω из (8), при заданном радиусе барабана R , отношение линейной скорости барабана ($U = R \cdot \omega$) к скорости хлопкоуборочной машины V , т.е., коэффициент опережения с учетом (1), рассчитывается следующим образом:

$$K = \frac{U}{V} = \frac{R \cdot \omega}{V} = \frac{V_{кр}}{\lambda \cdot V}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что коэффициент опережения барабана прямо пропорционален критической скорости извлечения дольки из коробочки хлопчатника. Долька с семенами (7 ... 9 шт.) как гибкая растяжимая многослойная нить, охватывается цилиндрической (или конической на горизонтальном шпиндельном аппарате) зубчатой поверхностью шпинделя. Шпиндель за время нахождения в рабочей камере аппарата должен наматывать дольку длиной ℓ_d на себя и транспортировать вместе с барабаном в зону съема.

Известно, что при определении оптимального шага t расстановки шпинделей, одним из основных условий захвата хлопка является условный диаметр раскрытой хлопковой коробочки [10, 11]. Выше было отмечено, что надежный захват волокон хлопка шпинделем осуществляется при деформировании раскрытой коробочки до 30% от ее исходного объема [11]. Исходя из этого, была получена формула для расчета шага расстановки шпинделей на барабане:

$$t = 2\sqrt{(D'_k + d)^2 - (\epsilon + d)^2}, \quad (10)$$

где t – шаг между смежными шпинделями на барабане (рис. 1, 2) м; $d = 2r$ – диаметр шпинделя, м; D'_k – условный диаметр деформированной раскрытой коробочки, который определяется по эмпирической формуле [11]: $D'_k = 0.8256 \cdot D_k$. Здесь, 0.8256 – опытный коэффициент, а D_k исходный диаметр раскрытой коробочки, который, согласно опытным данным [13, 20], изменяется в пределах ($D_k = 42$ – 70 мм); ϵ – ширина рабочей щели в камере сбора хлопка, м.

Ширина рабочей щели в существующих аппаратах варьируется в пределах $\epsilon = 24$ – 40 мм, а в начале рабочей камеры расстояние между поверхностями шпинделей парно расположенных барабанов (рис.1) изменяется в пределах $B_1 = 160$ – 170 мм [10].

Если длина развертки шпиндельного барабана равна:

$$L = 2\pi R_6 = t \cdot Z, \quad (11)$$

то при шаге t и количестве шпинделей на барабане Z , а также его опережении K , значение L должно быть больше или равным

$$2\pi R_6 \geq K \cdot Z \cdot D'_k. \quad (12)$$

Подставляя t из (10) в (12), получим:

$$K \cdot Z \cdot D'_k \leq t \cdot Z = 2Z \left(\sqrt{(D'_k + d)^2 - (\epsilon + d)^2} \right). \quad (13)$$

Тогда коэффициент опережения равен:

$$K \leq \frac{2\sqrt{(D'_k + d)^2 - (\epsilon + d)^2}}{D'_k} = \frac{2\sqrt{D_k'^2 + 2d(D'_k - \epsilon) - \epsilon^2}}{D'_k}. \quad (14)$$

Исходя из (9) и (10), можно определить скорость движения хлопкоуборочной машины:

$$V = \frac{V_{кр} \cdot D'_k}{\lambda t} = \frac{V_{кр} \cdot D'_k}{2\lambda \sqrt{(D'_k + d)^2 - (\epsilon + d)^2}}. \quad (15)$$

В отличие от известных методов расчета опережения шпиндельного барабана по формулам (1)–(3) и скорости движения вертикально-шпиндельной хлопкоуборочной машины по (4), в выражениях (9) и (15) опережение барабана и скорость машины рассчитывается с учетом критической скорости захвата, наматывания хлопка (без разрыва долек на отдельные летучки), параметров уборочного аппарата (λ , d , ϵ) и условного диаметра раскрытой коробочки (принимаемой в виде шара с диаметром D_k).

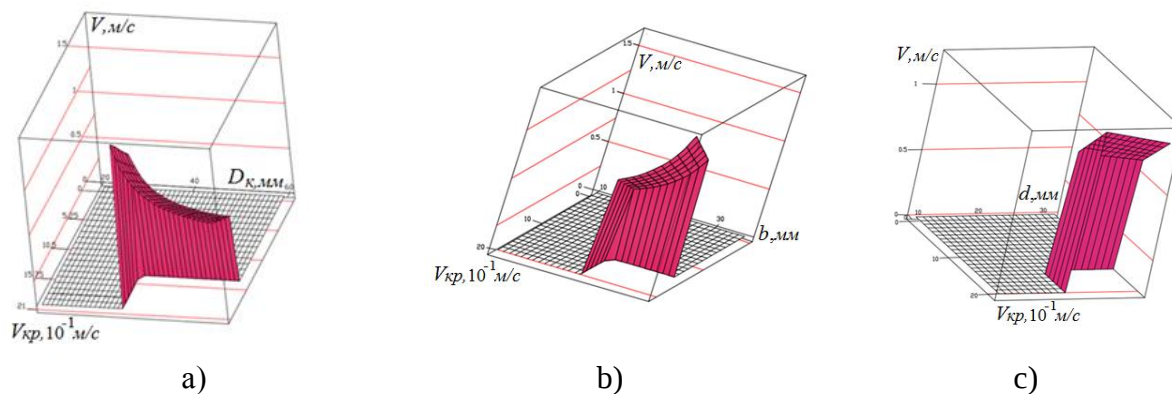


Рис. 3. Изменение скорости движения хлопкоуборочной машины в зависимости от параметров хлопка и уборочного аппарата: а) скорость хлопкоуборочной машины V в зависимости от критической скорости захвата, наматывания хлопка $V_{кр}$ и диаметра раскрытой коробочки хлопчатника D_k , б) скорость хлопкоуборочной машины V в зависимости от $V_{кр}$ и ширины рабочей щели уборочного аппарата, в) скорость хлопкоуборочной машины V в зависимости от $V_{кр}$ и диаметра шпинделя d

На основе формулы (15) в среде программирования *Mathcad-15* выполнены численные исследования и построены графики изменения V в зависимости от D_k , b , d в трехмерном изображении. При заданных исходных параметрах (диаметр раскрытой коробочки $D_k = 40\text{--}65$ мм, ширина рабочей щели между парнорасположенными барабанами $b = 26\text{--}40$ мм, диаметр шпинделя $d = 2r = 20\text{--}30$ мм и критическая скорость наматывания хлопка шпинделем $V_{кр} = 1.6\text{--}2.1$ м/с), а также при соотношении радиусов шпинделя и качения ролика равного $\lambda = 1$, построены графики изменения V в трехмерной постановке (рис. 3).

Из рис. 3, а можно заметить, что с ростом значений $V_{кр}$ и D_k ожидается уменьшение расчетной скорости движения машины (например, с 1.828 м/с до 1.393 м/с). Согласно формулы (15) с ростом диаметра раскрытой коробочки D_k при заданных значениях $V_{кр}$, которые соответствуют условию неразрывности дольки хлопка во время извлечения ее шпинделем, скорость машины должна уменьшаться. В результате опытов, проведенных в «БМКБ-Агромаш» на машине ХС-17, были получены положительные результаты при следующих режимах работы: I-я рабочая скорость машины и II-я скорость уборочного аппарата [12].

На рис. 3, б показано изменение V по нелинейной зависимости от ширины щели b рабочей камеры при изменении $V_{кр}$. Показано, что увеличение рабочей щели b и критической скорости извлечения хлопка $V_{кр}$ положительно влияет на скорость движения хлопкоуборочной машины, что соответствует результатам опытов, проведенных в работе [17] на примере аппарата многократной обработки кустов хлопчатника.

Как известно, увеличение диаметра шпинделя приводит к росту его линейной и активной скоростей. Изменение диаметра шпинделя d от 20 мм до 30 мм, а также $V_{кр}$, показанные на рис. 3, в, привели к линейному росту скорости машины с учетом неразрывности дольки при ее извлечении.

Исходя из вышесказанного, при заданных диаметрах раскрытой коробочки (условный шар) D_k и критической скорости захвата и наматывания на шпиндель хлопка, наименьшее значение скорости машины должно быть не менее 1.08 м/с, а при наибольшей рабочей щели, диаметре коробочки, а также критической скорости 1.6 – 2.0 м/с, скорость машины должна быть в пределах 1.3 – 1.6 м/с. Эти расчеты согласуются с результатами многолетних испытаний хлопкоуборочных машин в Центре сертификации и испытания техники и технологии сельского хозяйства (ЦИТТ) [12, 22].

Заключение. Результаты теоретических и экспериментальных исследований позволили:

1. Разработать уточненный метод расчетов коэффициента опережения шпиндельного барабана и скорости движения хлопкоуборочной машины, включающий объемно-деформированное состояние раскрытой хлопковой коробочки при сжатии шпиндельными барабанами и критическую скорость извлечения дольки хлопка шпинделем. Данный метод может быть использован при расчете и проектировании новых конструкций шпиндельных хлопкоуборочных машин.

2. Построить закономерности изменения скорости движения хлопкоуборочной машины на примере вертикально-шпиндельного аппарата в зависимости изменения критической скорости хлопка, диаметра раскрытой коробочки, ширины рабочей щели и диаметра шпинделя, позволяющие определить рациональные предельные скорости машины при сборе хлопка.

3. Определить нижние предельные значения скорости движения хлопкоуборочной машины 0.615 м/с при гипоциклическом вращении шпинделя в рабочей камере аппарата с учетом фронтального расположения активной части шпинделя, а при эпициклическом вращении – 0.965 м/с. В целом, при эпициклическом вращении шпинделя в рабочей камере аппарата можно рекомендовать скорость движения хлопкоуборочной машины от 1.13 м/с до 1.567 м/с во время ее проектирования.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Astanakulov, K.D., Umirov, A.T., Sultanbekova, P.S., Alpamysova, G.B.* Determination of working indicators of New Holland TS-5060 combine for soy bean harvesting // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2021, Vol. 839, No. 5, pp. 052048.
- [2] *Astanakulov, K.D., Baimakhanov, K.A., Alpamysova, G.B., Babojanov, A.B.* Development of a pneumatic drum-type seeding apparatus for two-row seeding soybean and mung bean // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2021, Vol. 839, No. 5, pp. 052062.
- [3] *Astanakulov, K.D., Balabanov, V.I., Vitliemov, P., Ashurov, N.A., Khakberdiev, O.* Biometric parameters and physical-mechanical properties of wheat and barley grown on dry lands // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2021, Vol. 868, No. 1, pp. 012077.
- [4] *Матяшкин Ю.И., Матяшкин Н.Ю.* Разработка и создание энергосберегающего комплекса ротационных почвообрабатывающих машин // Вестник ДГОУ ВПО МГАУ. 2009, №2, стр. 12-15.
- [5] *Матяшкин Ю.И.* Ротационные почвообрабатывающие машины (теория, расчет, эксплуатация) / Ю.И. Матяшкин. Н.Ю. Матяшкин. Казань: Изд.Казанского ГАУ, 2008, 204 с.
- [6] *Сабlikов М.В.* Хлопкоуборочные машины. Москва. Агропромиздат, 1985, 151с.
- [7] *Усманходжаев Х.Х.* Теория механизмов и производительности хлопкоуборочных машин. Ташкент: Фан. 1990, 116с.
- [8] *Rizaev A.A., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A.* Advance of the spindle drum and frontality of the active spindle surface. // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020, Vol. 883, pp. 012157
- [9] *Li T., Hao F., Han Z., Fang X., Hao Z., Liu Y.* Design and Test of Horizontal Spindle Picking Head with High Efficiency // Nongye Jixie Xuebao/Transactions Chinese Soc. Agric. Mach. 2019, Vol. 50, No. 12, pp. 63-72.
- [10] *Rizaev A.A., Matchanov R.D., Yuldashev A.T., Kuldoshev D.A., Djuraeva N.B.* Cotton harvesters for one-time cotton-picking // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2021, Vol. 1030, No. 1, P. 012173.
- [11] *Ризаев А.А., Аннакулова Г.К., Мирзаева М.М., Темиров Дж.* Рабочая щель уборочного аппарата при разовом сборе хлопка. // Узбекский журнал «Проблемы механики». 2020, №4, стр. 61-65.
- [12] *Матчанов Р.Д.* Хлопкоуборочные машины 1929-2010 гг. Ташкент: «Fan va texnologiyalar bosmaxonasi», 2011, 253с.
- [13] *Шполянский Д.М.* Технологические основы рабочих органов и схемы хлопкоуборочных машин. Ташкент, изд. «Мехнат», 1985, 254 с.
- [14] *Файзиев И.Х.* Определение ориентации абсолютной скорости к зубцу и степени активности зубьев шпинделей хлопкоуборочного аппарата. В кн. Кинематика и динамика механизмов хлопкоуборочной машины. Ташкент. Фан. 1966, стр. 25-34.
- [15] *Джаббар О.С.* Теория хлопкоуборочного аппарата с непрерывным вращением шпинделей. Ташкент: Фан, 1977, 128с.
- [16] *Садриддинов А.С.* Научные основы машинного проектирования и совершенствования хлопкоуборочных аппаратов. Ташкент: Фан, 1986, 200 с.
- [17] *Глуценко А.Д., Тошболтаев М.* Динамика и оптимизация хлопкоуборочного аппарата многократной обработки растений хлопчатника. Ташкент: Фан, 1990, 232 с.
- [18] *Тулаев А.Р.* Разработка и обоснование параметров хлопкоуборочного аппарата с механизмом завода кустов в рабочую камеру. Автореф. дисс. На соискание уч. степ. к.т.н. Ташкент. 1990. 24 с.
- [19] *Абдазимов А.Д.* Повышение рабочих скоростей агрегата и эффективности рабочих органов уборочных аппаратов вертикально-шпиндельных хлопкоуборочных машин. Ташкент: ТГТУ им. А.Р.Беруни, 1995, 192 с.
- [20] *Омонов Н.Н.* Ёўза навлари ҳосилини теришга мосланувчанлиги оширилган пахта териш аппаратларини яратиш. Тошкент: “Lesson Press” нашриёти. 2023, 120 с.

- [21] Патент № IAP 07551. Вертикально-шпиндельный хлопкоуборочный аппарат / Отажонов Н.С., Матчанов Р.Д., Ризаев А.А. и др. – Опубликовано в бюл. №12, 29.12.2023 г.
- [22] Rizaev A.A., Khakimov M.A., Usarov S., Akhmedov Sh.A. Development of the four-row cotton harvester for one-time cotton picking // AIP Conference Proceedings. 2022. P. 060005.

Дата поступления
15.05.2025

A.A. Rizaev, N.B. Juraeva. Shpindelli barabanning o'zishi va paxta terish mashinasining harakat tezligi

Annotatsiya. Paxta terish apparatida shpindelli barabanning aylanma harakati tezligini mashina tezligiga nisbatan o'zishi paxta terish mashinasini kinematik parametrlaridan biridir. Maqolada paxta terish mashinasi ish samaradorligini ta'minlashga qaratilgan barabanlarning o'zishini hisoblash usullari ko'rilgan. Gorizontaal shpindelli mashina barabanidagi shpindelning kassetaga yaqin joylashgan qismi uchun minimal siljish, vertikal shpindelli mashinada esa shpindellarning yetarli faolligini (paxtani ilib olishi) ta'minlash o'zish uchun asosiy mezon deb qaralgan. Bu mezonga qo'shimcha ravishda vertikal shpindelli barabanlarni o'zishini va mashina tezligini aniqlashda juft joylashgan barabanlar orasida ochilgan paxta ko'sagini hajmiy deformatsiyasi va paxta piltasi (dolka) uzilishiga qarshi tezliklari qabul qilindi. Tuzilgan analitik bog'lanishlar asosida Mathcad-15 dasturiy muhitidan foydalanib, mashina tezligi paxta ko'sagi va terish apparatining berilgan parametrlari asosida grafik bog'lanishlar keltirildi.

Kalit so'zlar: paxta terish mashinasi, shpindelli baraban, o'zish, shpindel, paxta, kritik tezlik.

A.A. Rizaev, N.B. Juraeva. Spindle Drum Lead and Cotton Picking Machine Speed

Abstract. Lead, as the ratio of the peripheral speed of the spindle drum to the speed of the machine, is one of the main kinematic parameters of the harvesting unit installed on a mobile base. The article discusses the results of the developed methods for determining the lead of the drum, aimed at ensuring the efficiency of the cotton-harvesting machine. In this case, the main criteria for choosing the lead of the drum were the minimum movement of the inner end of the horizontal spindle during cotton picking or ensuring a sufficiently active state of the vertical spindle in the working chamber of the harvesting unit. In addition, in determining the lead of the drum and the speed of the vertical spindle cotton-harvesting machine, the calculation criterion is the critical speed of capturing and winding cotton fiber by the spindle when interacting with an open boll compressed between the drums. Based on the Mathcad-15 programming environment, graphs of the change in the speed of the machine were plotted depending on the parameters of the cotton boll and the harvesting unit during cotton picking by machines.

Keywords: cotton picker, spindle drum, lead, spindle, cotton, critical speed.

УДК 621.01:631.588

СИЛЫ ТРЕНИЯ ДВУХГРАННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ОДНОГРАННЫХ КЛИНОВЫХ ПАР

¹Худжаев М.К., ¹Иброхимов Ш.А., ¹Пирназаров Г.Ф., ²Хасанов Б.Б., ¹Джумаев Х.Дж.

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

²Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета им. И.Каримова

E-mail: mukhiddinkhudjaev@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена статика двухгранных осесимметричных и одногранных клиновых пар. Проведен краткий обзор существующих работ по тематике. Применением принципа освобождения от связей, получены уравнения равновесия клина. Статически неопределенная задача с помощью формулы Кулона приведена к статически определенной задаче. Для двух видов клина получены обобщающие аналитические выражения силы трения. По полученным решениям нормальные силы и силы трения имеют конкретные числовые значения при произвольных углах наклона клина. Приведены графики некоторых результатов расчета. Проведен сравнительный анализ полученных результатов, подтверждающий достоверность полученных решений.

Ключевые слова: сила трения, клин, постоянная сила, уравнение равновесия.

Введение. Рабочие органы обработки почвы и клиноремные передачи, применяемые в сельхозмашинах, а также пружинно-фрикционные комплекты тележки грузовых вагонов и многие другие механизмы в железнодорожной отрасли имеют форму клина. Поэтому определение силы трения и силы реакции связей клина является актуальным и полезным исследованием. Этим задачам посвящены многие работы исследователей [1-4, 7-9].

В пятидесятых годах прошлого века от теории Кулона перешли к общей теории клина и, в частности, создана теория двухгранного клина [1]. Несмотря на отрицательные обсуждения [2], эта теория нашла свое подтверждение в работах других авторов [3].

Впервые в [4] обращено внимание на невозможность вычислить значение силы реакции при некоторых углах наклона клина по формулам этой теории, а также формулам, приведенным в литературе другими авторами [5, 6]. В этом плане, в работе [7] получено обобщающее аналитическое выражение нормальной силы реакции связи клина.

В настоящей работе определены силы трения одногранного и двухгранного клина, дающие возможность получить их значения при произвольных углах наклона.

Постановка и решение задачи. Пусть клин под действием постоянной силы проникает в однородную среду. Нужно определить силы трения. Задачу решаем методами классической механики. Рассмотрим два вида клина.

1. Сначала рассмотрим осесимметричный двухгранный клин. Составим уравнение равновесия, применяя принцип освобождения от связей [11-12]. При проникновении вертикально расположенного клина в какую-либо среду, под действием вертикально направленной постоянной силы $\bar{P}$, образуются силы реакции и силы трения (рис.1).

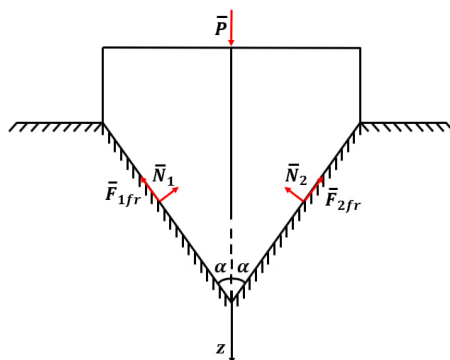


Рис.1. Форма двухгранного клина и действующие силы

Приравнявая нулю сумму проекций активных, пассивных сил на ось z и заменив их знак, имеем:

$$N_1 \sin \alpha + F_{1fr} \cos \alpha + N_2 \sin \alpha + F_{2fr} \cos \alpha - P = 0. \quad (1)$$

Отсюда, считая, что $N_1 = N_2 = N$, $F_{1fr} = F_{2fr} = F_{fr}$, для однородной среды имеем

$$2N \sin \alpha + 2 f N \cos \alpha - P = 0,$$

с учетом $F_{fr} = fN$ [11], получим

$$fP = 2F_{fr} (\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

и определяем силу трения двухгранного клина:

$$F_{fr} = \frac{fP}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)}. \quad (2)$$

По полученному решению сила трения имеет конкретное числовое значение для всех значений угла наклона α , тем и отличается от существующей формулы $F_{fr} = Pf / \sin \alpha$ [1-3, 5, 6].

2. Теперь рассмотрим одногранный вертикально расположенный клин под действием вертикально направленной постоянной силы $\bar{P}$ (рис.2). Как и в предыдущем случае, образующие силы трения $\bar{F}_{fr}$ лежат в рабочих плоскостях, нормальные силы $\bar{N}$ направлены перпендикулярно этим плоскостям.

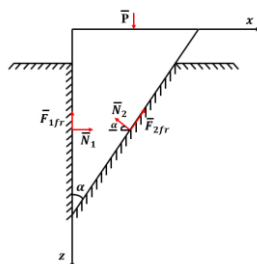


Рис.2. Форма одногранного клина и действующие силы

Здесь также, применяя принцип освобождения от связей, составим уравнения равновесия проекций всех сил на оси X и Z . Учитывая формулу $F_{fr} = fN$ [11], имеем:

$$\sum F_{kx} = 0: P - F_{2fr} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha - F_{1fr} = 0. \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = 0: N_1 - N_2 \cos \alpha + F_{2fr} \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

С учетом $N_1 = F_{1fr} / f$, $N_2 = F_{2fr} / f$, из (4) находим

$$F_{1fr} = F_{2fr} (\cos \alpha - f \sin \alpha). \quad (5)$$

и, подставив это в (3), получим

$$fP = F_{2fr} [2f \cos \alpha + (1 - f^2) \sin \alpha]. \quad (6)$$

Из последнего равенства находим

$$F_{2fr} = \frac{fP}{2f \cos \alpha + (1 - f^2) \sin \alpha}. \quad (7)$$

Подставляя в (5), определяем

$$F_{1fr} = \frac{fP(\cos \alpha - f \sin \alpha)}{2f \cos \alpha + (1 - f^2) \sin \alpha}. \quad (8)$$

Таким образом, определены силы трения двухгранного и одногранного клиновых пар, с помощью которых при заданных углах наклона, коэффициента трения и приложенной силы, можно определить силу трения. По этим формулам силы трения имеют конкретные значения при всех значениях угла наклона, в отличие от формул, приведенных в литературе [1–3, 5, 6].

Результаты. На рис.3 приведены результаты расчетов силы трения по полученному решению (2) для осесимметричного двухгранного клина при разных углах наклона α при $f = 0,4$ (коэффициент трения стали по грунту): $P = 100$ Н (а) и $P = 200$ Н (б).

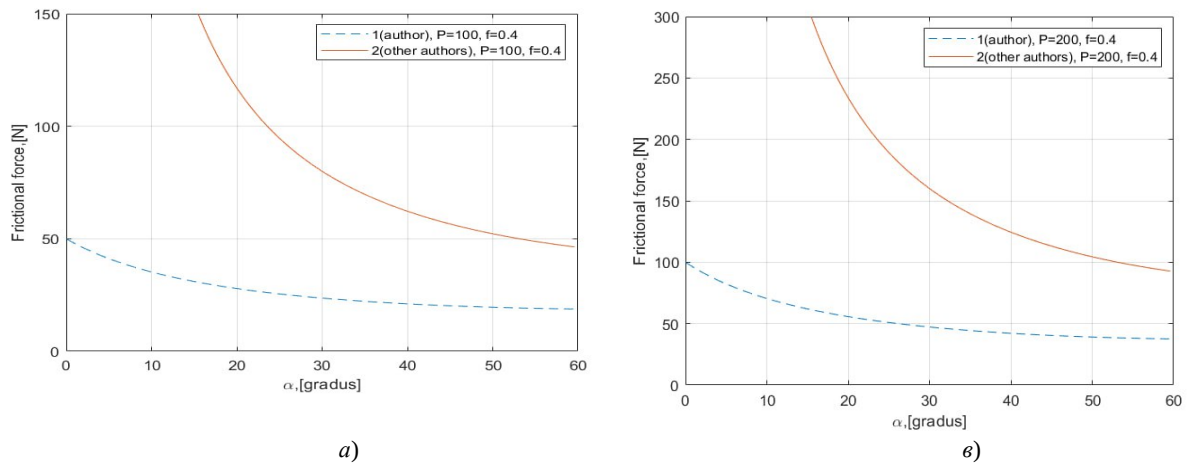


Рис.3. Сила трения двухгранного осесимметричного клина

Сплошная линия получена по формуле $F_{fr} = Pf / \sin \alpha$ [1–3, 5, 6]. По этой формуле видно, что при стремлении угла наклона α к нулю сила трения стремится к бесконечности, а по полученной авторами данной статьи формуле (2), она имеет конкретное числовое значение, что соответствует физике явления.

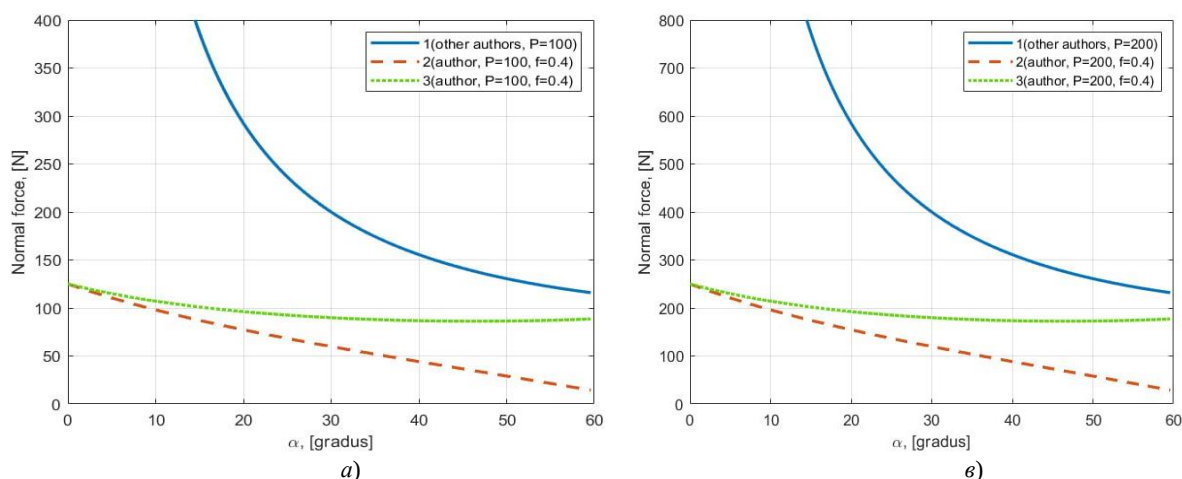


Рис.4. Силы трения одногранного осесимметричного клина

Изменение силы трения одногранного клина в зависимости от угла наклона α приведено на рис.4. Расчеты проводились для $f=0.4$; $P=100$ Н (а) и $P=200$ Н (б). Кривая 1) получена по формуле, полученной другими авторами [1–3, 5, 6]. По решениям (6) и (7) получены кривые 2) и 3), соответствующие наклонной и прямой поверхностям одногранного клина.

Из графиков видно, что при одинаковых значениях приложенных сил и коэффициента трения, значения силы трения одногранного клина намного меньше, чем у двухгранного клина.

Заключение. Получены аналитические выражения силы трения двухгранного осесимметричного и одногранного клина, с помощью которых при заданных значениях угла наклона, коэффициента трения и приложенной силы, можно определить силы реакции и силу трения. Силы трения двухгранного и одногранного клина по полученным аналитическим решениям в отличие от существующих результатов в литературе, имеют конкретные числовые значения при любых углах наклона клина. В полученных аналитических выражениях силы трения двухгранного осесимметричного и одногранного клина не участвуют члены, стремящиеся к бесконечности. Поэтому полученные решения можно назвать обобщенными выражениями силы трения двухгранного осесимметричного и одногранного клина.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горячкин В.П. Собрание сочинений. Т.2. М.: Колос, 1968, 455 с.
- [2] Дьяков В.П. Взаимодействие клинообразного рабочего органа с почвой // Журнал «Техника в сельском хозяйстве». 2009, № 5, стр. 44-45.
- [3] Гуреев И.И. Использование клина для обработки почвы в адаптивных агротехнологиях. // Журнал «Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии». 2019, №4, стр. 33-38.
- [4] Маликов Р.Х., Ризаев А.А., Юлдошев А.Т. К расчету клиновых пар с учетом сил трения. Узбекский журнал «Вопросы механики». 1995, №3, стр. 74-76.
- [5] Артоблевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988, 640 с.
- [6] Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др.: Теория механизмов и механика машин. /Под ред. К.В. Фролова. М.: Высшая школа, 2005, 496 с.
- [7] Rizaev A., Khudjaev M. Static problem of the asymmetric wedge // Technical science and innovation. Tashkent State Technical University named after Islam Karimov. 2022, No 2, pp. 204-208.
- [8] Khudjaev M., Rizaev A., Pirnazarov G., Khojikulov Sh. Modeling the dynamics of a wedge pair under the action of a constant force Transp. Res. Procedia. 2022, Vol. 63, pp. 458–464.
- [9] Khudjaev M. Asymmetric wedges reaction forces // E3S Web Conf. / ed. Malygina I. 2022, Vol. 363, P. 01046.
- [10] Туранов Х.Т. Моя научная лаборатория по механике. Екатеринбург, 2013, 240 с.
- [11] Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2002, 416 с.
- [12] Xudjayev M.K. “Nazariy mexanika” (o’zbek va rus tillarida). O’quv qo’llanma. Toshkent. Yosh avlod matbaa. 2022, 216 bet.

Дата поступления
17.02.2025

Xudjaev M.K., Ibroximov Sh.A., Pirnazarov G.F., Xasanov B.B., Djumaev X.Dj. Ikki qirrali o'qqa nisbatan simmetrik va bir qirrali ponalarining ishqalanish kuchlari

Annotatsiya. Ikki qirrali o'qqa nisbatan simmetrik va bir qirrali ponalarining statikasi ko'rib chiqilgan. Mavzu bo'yicha ishlarning qisqacha tahlili keltirilgan. Bog'lanishlardan ozod qilish qo'llanilib, ponalarining muvozanat tenglamalari tuzilgan. Statik noaniq masala Kulon formulasi yordamida statik aniq masalaga keltirilgan. Ikki turdagi ponalar uchun ishqalanish kuchlarining umumlashgan analitik ifodalari olingan. Olingan yechimlarga ko'ra, normal kuchlar va ishqalanish kuchlari ponaning ixtiyoriy o'tkirlik burchaklarida aniq qiymatga ega bo'lar ekan. Ba'zi hisoblash natijalarining grafiklari keltirilgan. Olingan yechimlar asosida ularning ishonchligini tasdiqlovchi hisoblashlar natijalarining qiyosiy tahlili keltirilgan.

Kalit so'zlar: ishqalanish kuchi, pona, doimiy kuch, muvozanat tenglamasi.

Khudjaev M.K., Ibrohimov Sh.A., Pirnazarov G.F., Khasanov B.B., Djumaev Kh.Dj. Friction forces of dihedral axisymmetric and unihedral wedge pairs

Abstract. The statics of dihedral axisymmetric and unihedral wedge pairs is considered. A brief review of existing publications on the subject is provided. The equilibrium equations of the wedge are derived using the principle of release from constraints. By applying the Coulomb formula, the statically indeterminate problem is transformed into a statically determinate problem. Generalized analytical expressions for the friction force were derived for two types of wedges. According to the solutions obtained, normal and friction forces have specific numerical values at arbitrary angles of inclination of the wedge. Graphs illustrating some calculation results are presented. A comparative analysis of the results obtained is conducted, confirming the reliability of these solutions.

Keywords: friction force, wedge, constant force, equilibrium equation.

УДК 621.01

ИЗГИБ ПИЛЬНЫХ ДИСКОВ ВОЛОКНООТДЕЛИТЕЛЯ С УЧЕТОМ ИХ ЗАТЯЖКИ

¹Мухаммадиев Д.М., ¹Абзиров О.Х., ¹Жумаев Н.К., ²Жамолова Л.Ю.

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

²Ташкентский государственный аграрный университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: davlat_mm@mail.ru

Аннотация. В статье представлены результаты эксперимента по изучению изгиба пильных дисков волоконно-отделительной машины при контакте с колосником с учётом силы затяжки. Испытания проводились на стенде с использованием прокладок из алюминиевого сплава и стали. Установлено, что при минимальной изгибающей силе (6.9 кН) изгиб диска со стальной прокладкой меньше на 32.25% по сравнению с алюминиевой. При пятикратном увеличении силы затяжки снижение изгиба достигает 10.45%, что указывает на повышение устойчивости дисков к деформации.

Ключевые слова: волоконноотделительная машина; пильный цилиндр; пильный диск; межпильная прокладка; алюминиевый сплав АК5М2; сталь Ст3; изгиб; индикатор; изгибающая сила.

В настоящее время на отечественных волоконноотделительных машинах используются дисковые пилы толщиной 0.95 мм, с наружным диаметром 320 мм, и внутренним диаметром 100 мм [1].

По вопросу увеличения долговечности колосников и пильного волоконноотделителя проведено много научных исследований. Так, для увеличения долговечности колосников в центральной части межколосникового зазора устанавливают пильные диски, иначе происходит касание зубьев пил с колосниками, что приводит к повреждению волокон и семян и износу колосников. В связи с этим требуется проведение рихтовки, упрочнения зубьев пильных дисков и точной сборки пильных цилиндров волоконноотделителей.

Р.М. Каттаходжаевым [2] установлено, что с увеличением наружного диаметра пил до 400 мм, снижаются плотность сырцового валика, сумма пороков в волокне и сорные примеси, а также наблюдается увеличение производительности волоконноотделителя.

К.М. Исламкуловым [3] рекомендована новая технология повышения прочности и износостойкости зубчатых дисковых пил линтерных и волоконноотделительных машин с использованием индукционных установок (ТВЧ). Расчетным путем установлены напряжения, возникающие при термообработке дисковых пил. Расчеты показали увеличение износостойкости дисковых пил в 2-3 раза, по сравнению с существующими технологиями. Кроме

того, рекомендовано использование дисковых пил из стали 65Г вместо инструментальной стали У8Г.

Также, в этом направлении П.А. Роговым и Р.Х. Мустафиным [4] определено, что при нормальном режиме работы пильного цилиндра на каждый зуб пильного диска приходится сила 40-45 Н; эта сила равномерно распределяется между двумя колосниками, так как пильный диск установлен по центру межколосникового зазора.

В работе А.Г. Когоновского [5] зафиксировано значение плотности сырцового валика и силы, действующей на колосник. Установлена наименьшая плотность 25 Н, средняя плотность 42 Н и наибольшая плотность 60 Н сырцового валика. Это усилие является достаточным для состояния рабочих поверхностей зубьев пильных дисков, колосников, которые приводят к повреждениям хлопкового волокна.

В статье [6] приведены результаты исследования изгиба пильных дисков линтерной машины 5ЛП. В результате исследований установлено, что с увеличением изгибающих сил с 9.8 до 49 Н увеличивается изгиб пильного диска с алюминиевой прокладкой до 4.5 мм, а со стальной прокладкой - до 3.5 мм, что увеличивает устойчивость пильных дисков при изгибах на 28.6%, по сравнению с алюминиевой прокладкой из АК5М2.

Анализ проведенных исследований, показал, что до сих пор не изучен изгиб самого пильного диска волокноотделительной машины в зависимости от касаний о колосник.

В волокноотделительной машине 4ДП-130, в основном, используются прокладки из алюминиевого сплава АК5М2 (рис. 1, а), которые устанавливаются по всей длине вала между пильными дисками с шагом $17.05+0.95=18$ мм в количестве 129 штук и располагаются между колосниковыми зазорами [7]. Существующие конструкции элементов пильно-колосниковой системы волокноотделительной машины не позволяют получить заданную точность сборки как пильного цилиндра в отдельности, так и колосниковой решетки, что приводит к отклонениям от пространственной координации.

Размерные цепочки колосниковых решеток и пильных цилиндров зависят от метода сборки, а также от точности изготовления пильных дисков, колосников и межпильных прокладок. Поэтому неточное расположение пильных дисков в межколосниковых зазорах приводит к изгибу пильных дисков, что способствует износу рабочих зон колосников и зубьев пильных дисков [7].

Установлено, что надежность рабочих зон колосников и зубьев пильных дисков зависит от размеров изготовления пильных дисков, колосников и межпильных прокладок. Поэтому для устранения одного из указанных недостатков рекомендована новая конструкция межпильных прокладок волокноотделительной машины (рис. 1, б) [8].

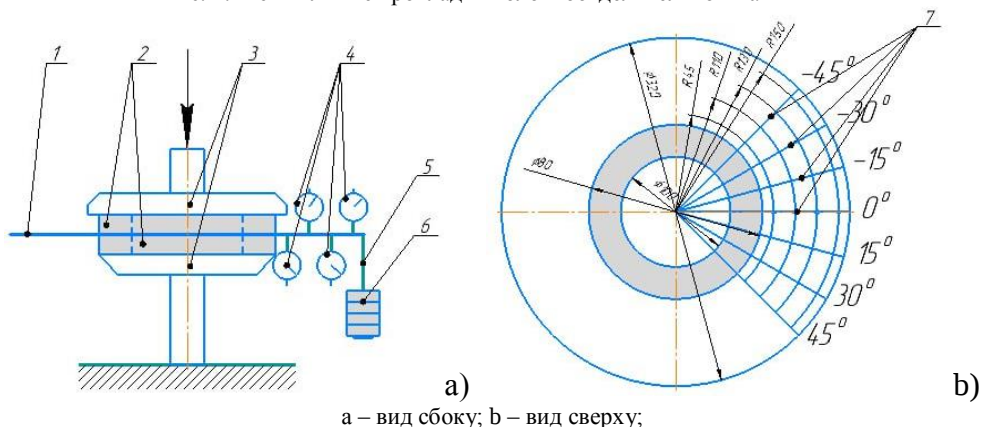
Для наблюдения изгиба пильных дисков волокноотделительной машины на основе предложенной схемы (рис. 2) была изготовлена стендовая установка (рис. 3). Целью экспериментального исследования является изучение изгиба пильных дисков от касания к колоснику. Для этого использованы как серийные прокладки из алюминиевого сплава АК5М2, так и рекомендуемые прокладки новой конструкции из стали Ст3 для волокноотделительной машины.

Для создания условия крепления пильных дисков на валу пильного цилиндра волокноотделителя, то есть затяжки прокладок с двух сторон на пильный диск установлен винтовой механический пресс со следующими усилиями – 9611.61; 19223.23; 28834.84; 38446.46; 48058.07 Н. После затяжки прокладки и пильного диска индикаторами часового типа марки ИЧ-10 0.01 фиксировали изгиб (рис. 2 и 3). Для создания процесса касания пильного диска о колосник, на максимальном диаметре пильного диска взвешивается груз весом 0.7; 1.4; 2.1; 2.8; 3.6 и 4.4 кг, тогда изгибающая сила соответственно равна 6.9; 13.7; 20.6; 27.5; 35.3 и 43.1 Н.

Пильный диск между двумя прокладками сжимается винтовым прессом, а измерения изгиба производили в радиусах пильного диска $R=90$; 110 ; 130 ; 150 мм. При этом изгибающая сила создаётся путем навеса в радиусе $R=155$ мм. Для этого в пильном диске выполнены отверстия, куда устанавливается стержень для взвешивания грузов (рис. 2 и 3).



Рис. 1. Межпильные прокладки волоконотделительной машины



а – вид сбоку; б – вид сверху;
1 – пильный диск; 2 – межпильные прокладки; 3 – механический зажим; 4 – индикаторы часового типа марки ИЧ-10 0.01; 5 – стержень для груза; 6 – груз; 7 – секториальные углы (-45° , -30° , -15° , 0° , 15° , 30° , 45°)

Рис. 2. Схема экспериментального стенда по изучению изгиба пильных дисков волоконотделителя

Для проведения экспериментального исследования изгиба пильных дисков использованы прокладки из алюминиевого сплава АК5М2 и стали Ст3.

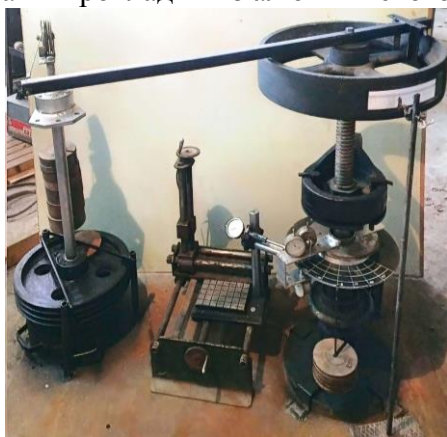


Рис. 3. Фотоснимок экспериментального стенда по изучению изгиба пильных дисков волоконотделителя

Результаты экспериментального исследования (рис. 4) показали снижение изгиба пильного диска от 4.65 до 3.06 мм с алюминиевой прокладкой и от 3.15 до 2,74 мм со стальной прокладкой, то есть на 15.0% при увеличении силы затяжки пил с 9611.61 до 48058.07 Н при изгибающей силе 43.1 Н.

Результаты исследований показали, что с увеличением изгибающих сил с 6.9 до 43.1 Н увеличиваются значения изгиба пильного диска с алюминиевой прокладкой до 4.65 мм, а со стальной прокладкой до 3.15 мм при силе затяжки пил 9611.61 Н. При силе затяжки пил 48058.07 Н значения изгиба пильного диска с алюминиевой прокладкой увеличиваются до 3.06 мм, а со стальной

прокладкой – до 2.74 мм (рис. 5).

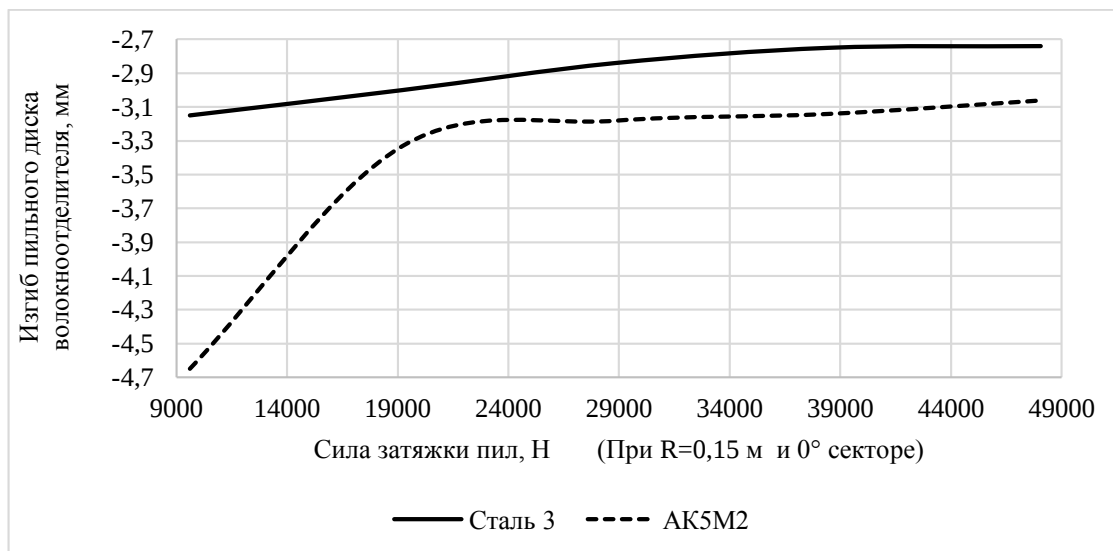
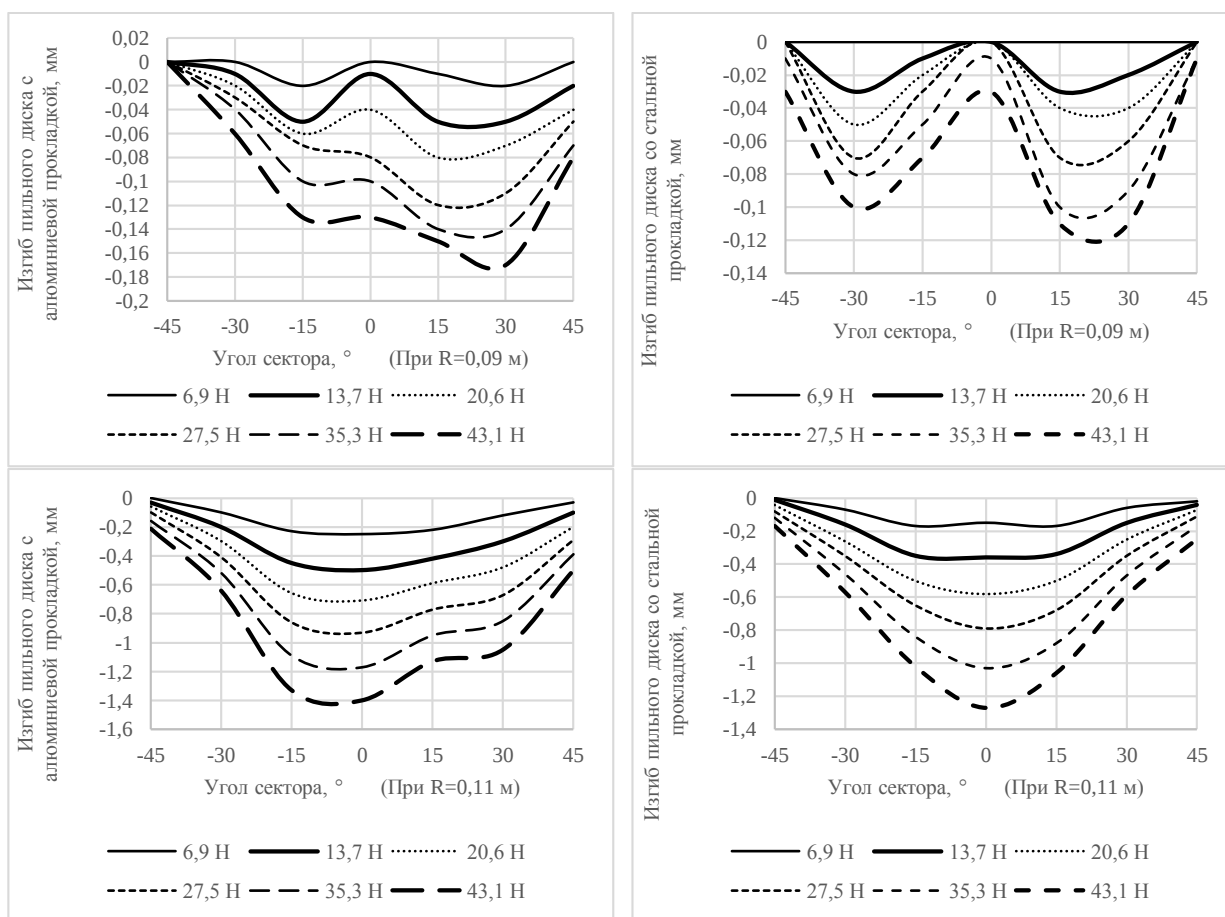


Рис. 4. Изменение изгиба пильного диска волоконноотделителя в зависимости от силы затяжки пил с прокладкой из алюминия AK5M2 и стали Ст3 для 0° сектора



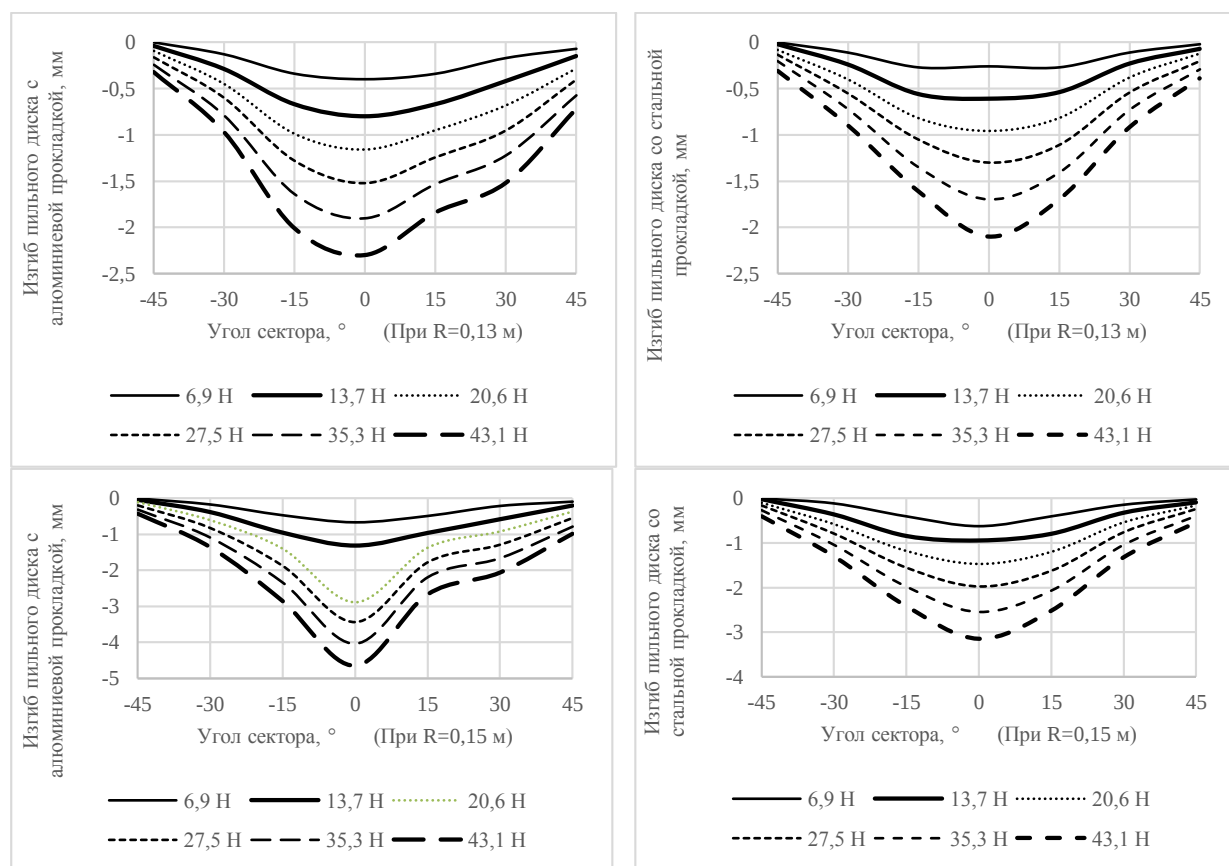


Рис. 5. Изменение изгиба пильного диска волокноотделителя в зависимости от изгибающей силы при силе затяжки пил 9611.61 Н и 0° сектора

Закключение. Результаты экспериментального исследования показали, что при увеличении силы затяжки пил от 9611.61 до 48058.07 Н при постоянной изгибающей нагрузке 43.1 Н, изгиб пильных дисков снижается с 4.65 до 3.06 мм с алюминиевой прокладкой и с 3.15 до 2.74 мм со стальной прокладкой. В среднем, уменьшение составило 15.15%. Также установлено, что при росте изгибающей силы с 6.9 до 43.1 Н, изгиб увеличивается до 4.65 мм (алюминий) и 3.15 мм (сталь) при минимальной затяжке, и снижается до 3.06 мм и 2.74 мм, соответственно, при максимальной затяжке. Полученные данные подтверждают повышение устойчивости дисков к изгибу, особенно при использовании стальной прокладки.

Статья выполнена за счет бюджетного финансирования Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зикрияев Э.З. Первичная обработка хлопка, Ташкент, 1999, 400 с.
- [2] Каттаходжаев Р.М. Исследование влияния увеличенных диаметров пил на основные показатели процесса джинования: Дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Ташкент. 1969. 135 с.
- [3] Исламкулов К.М. Разработка инновационной технологии упрочнения дисковых пил хлопкоочистительных машин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015, №6, стр. 25-30.
- [4] Рогов П.А., Мустафин Р.Х. Исследование величин бокового давления пил на колосники в джинах / Сб. научн. трудов ТИТЛП. Ташкент, 1974. № 25. стр. 35-40.
- [5] Когоновский А.Г. Изучение простоев оборудования и обоснования планового коэффициента использования оборудования хлопкозаводов / Отчет ЦНИИХПром. 1952. тема 23. стр. 102-164.
- [6] Мухаммадиев Д.М., Ибрагимов Ф.Х., Абзюров О.Х., Жамолова Л.Ю. Исследования изгиба пильных дисков лентерной машины // Узбекский журнал "Проблемы механики". 2023, № 2, стр. 77-83.
- [7] Паспорт пильного волокноотделителя 4ДП-130. Ташкент: Узбекхлопкомаш, 1988, 22 с.
- [8] Патент РУз № IAP 06691. Междупильная прокладка для хлопкоочистительных машин / Мухаммадиев Д.М., Ибрагимов Ф.Х. и др. - 2021. - №3. Зарегистрировано в Реестре патентов 29 декабря 2021 г.

Дата поступления
10.03.2025

Muhammadiev D.M., Abzoirov O.X., Jumaev N.K., Jamolova L.Yu. Tola ajratgich arrali diskini siqilish kuchini hisobga olgan holda egilishi

Annatosiya. Maqolada siqish kuchini hisobga olgan holda, arrali diskning kolosnikga tegishidan egilishini o'rganish bo'yicha tajriba natijalari keltirilgan. Sinovlar alyuminiy qotishmasi va po'lat qistirmalari yordamida o'tkazilgan. Minimal eguvchi (6.9 kN) kuchda po'lat qistirma bilan diskning egilishi alyuminiyga qaraganda 32.25% kamroq ekanligi aniqlangan. Siqish kuchining besh baravar oshishi bilan egilishning kamayishi 10.45% ga yetadi, bu disklarning deformasiyaga chidamliligi oshishini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Tola ajratgich mashinasi; arrali silindr; arrali disk; arralararo qistirma; alyuminiy qotishmasi AK5M2; po'lat St3; egilish; indikator; eguvchi kuch.

Mukhammadiev D.M., Abzoirov O.X., Jumaev N.K., Zhamolova L.Yu. Bending the saw blade of the saw gin taking into account their tightening

Abstract: The article presents the results of an experiment on studying the bending of saw blades of a saw gin machine when in contact with a grate, taking into account the tightening force. The tests were conducted on a stand using aluminum alloy and steel gaskets. It was found that at a minimum bending force (6.9 kN), the bending of a disc with a steel gasket is 32.25% less than that of an aluminum one. With a fivefold increase in the tightening force, the bending decreases by 10.45%, which indicates an increase in the resistance of the discs to deformation.

Keywords: saw gin machine; saw cylinder; saw blade; inter-saw gasket; aluminum alloy AK5M2; steel St3; bend; indicator; bending force.

УДК 631.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АГРЕГАТА И ПОЧВЫ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА РЫХЛЕНИЯ

¹Алимова Ф.А., ²Бойков В.П., ²Жданович Ч.И.

¹Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова, Узбекистан, Ташкент

²Белорусский национальный технический университет, Республика Беларусь, Минск

E-mail: feruza.alimova 1961@mail.ru, boykovvip@gmail.com, chzhdanovich@bntu.by

Аннотация. Статья содержит данные по имитационному моделированию технологического процесса рыхления почвы, способствующему повышению точности оценки эффективности различных типов почвообрабатывающих агрегатов, анализа энергоемкости процесса и выбора оптимальных режимов рыхления. Целью исследования является определение распределения напряжений, деформаций и сопротивлений почвы на рабочих органах комбинированного агрегата. С помощью пакета прикладных программ COMSOL Multiphysics составлена имитационная модель почвы в процессе взаимодействия ее с агрегатом. Согласно результатам исследования напряженно-деформированного состояния агрегата и почвы при рыхлении, на основной части трактора возникают напряжения сжатия в пределах изменения безразмерного вертикального напряжения 0 и -0.2, на раме агрегата возникают напряжения растяжения от 0 до 0.8, на грядилках агрегата возникают напряжения растяжения от 0 до 1.

Ключевые слова: имитационная модель, рыхление почвы, напряжение, деформация, агрегат, метод дискретных элементов.

Введение. Усовершенствование конструктивных и эксплуатационных параметров машинно-тракторных агрегатов необходимо проводить при совместном исследовании систем, работающих в совокупности друг с другом, при этом следует учитывать их динамические эксплуатационные режимы, условия внешней среды, технико-эксплуатационные показатели агрегатов.

Для того, чтобы проанализировать технологический процесс обработки почвы, а также определить агротехнические и энергетические показатели почвообрабатывающего орудия, следует разработать модели процесса взаимодействия его рабочих органов с почвой. Основными показателями, которые необходимо учитывать для адекватного представления модели процесса обработки почвы, являются конструкция почвообрабатывающего орудия и физико-механические свойства почвы. Согласно классической земледельческой механике основная часть рабочих органов почвообрабатывающих орудий рассматривается как разновидность двугранного или трехгранного клина. Следовательно, изучение деформации почвы при воздействии на нее почвообрабатывающих орудий возможно, проанализировав характер деформации почвы при воздействии на нее клина [1, 2].

Физико-механические свойства почвы оказывают значительное влияние на агротехнические показатели и тяговое сопротивление почвообрабатывающих машин. Почва как

технологическая среда характеризуется параметрами, изменяющимися во времени и в пространстве, физико-механические свойства почвы меняются в зависимости от погодных условий, севооборота культур, внесения в почву удобрений и т.д. [3, 4].

В работах исследователей [5, 6] определены связи геометрических параметров моделируемой поверхности с агротехническими и технологическими параметрами рабочего органа на основе аналитического метода построения поверхности Л.В. Гячева. Применяя теорию деформации грунтов, ученые рассматривали напряжение в почвенном пласте при действии группы сил по профилю рабочего органа как дискретные величины, т.е., как сумму напряжений от действия отдельных сил.

Используя программный комплекс *FlowVision*, построены модели разрушения почвы с учетом строения почвенной среды, переменности массы, ее деформации и разрушения. В качестве модели почвы также использовалась реологическая модель ньютоновской вязкой жидкости, что дало возможность моделировать процессы деформации и перемещения почвы, а также исследовать явления, происходящие внутри массива [7].

В настоящее время при разработке математической модели процесса обработки почвы учеными используется метод дискретных элементов [8, 9]. Установлено, что для описания вида связей между частицами почвы подходящими моделями являются модели контакта Герца-Миндлина с учетом адгезии и когезии. Для моделирования методом дискретных элементов установлены основные физико-механические свойства почвенных частиц, а именно коэффициент Пуассона, коэффициент статического трения, модуль сдвига, модуль Юнга, плотность частицы. Разработанные математические модели позволяют представить процесс механической обработки почвы, определить тяговое сопротивление почвообрабатывающей машины при различных параметрах, изучить напряженно-деформированное состояние её рабочих органов и почвы, характер и направление движения почвы при обработке.

Физико-механические свойства почвы. Физико-механические свойства почвы — это совокупность характеристик, определяющих поведение почвы под воздействием различных нагрузок, а также в условиях естественного состояния. Основные физико-механические свойства почвы включают:

Физические свойства:

Плотность грунта (ρ), которая классифицируется как плотность в естественном состоянии (ρ_n), истинная плотность частиц грунта (ρ_s) и сухого грунта (ρ_d). Влажность (W), пористость (n), удельный вес грунта (γ).

Механические свойства:

Прочность на сжатие выражает способность грунта сопротивляться разрушению под нагрузкой. Сдвиговая прочность (угол внутреннего трения и сцепления). Угол внутреннего трения (φ) и сцепления (c) определяют устойчивость грунта к сдвигу. Модуль деформации (E) описывает способность грунта к упругой деформации под нагрузкой. Коэффициент сжимаемости (m) характеризует изменение объема грунта под действием давления [10].

Материалы и методы. В основу процесса разработки новых рабочих органов, а также оптимизации конструктивно-технологических параметров берутся математические модели и полученные закономерности, что является подтверждением актуальности математического моделирования процесса обработки почвы различными почвообрабатывающими рабочими органами. В качестве входных параметров процесса рыхления как системы приняты: свойства почвы; конструкция почвообрабатывающего орудия и рабочих органов, способ крепления рабочих органов на раме и между собой; расположение обрабатываемого участка на склоне. Основными параметрами на выходе являются параметры напряженно-деформированного состояния почвы и конструкции агрегата, распределение продольных и вертикальных напряжений, критические зоны в конструкции рабочих органов.

Результаты и обсуждение. В почвоведении, механике грунтов и агрофизике существует ряд математических моделей для определения пористости, пластичности, сопротивления деформации и твёрдости почвы: расчёт свойств почвы по критерию Мора-Кулона (связь пористости почвы с плотностью); модель Проктора для твёрдости почвы (связь между уплотнением и влажностью почвы); классическая модель общего сопротивления почвы В.П. Горячкина, основанная на балансе сил и деформации почвы [11, 12].

Согласно результатам расчета: оптимальная влажность для обработки - 18%; почва устойчива при касательных напряжениях до 53.3 кПа; рекомендуемое тяговое усилие для техники рассчитывается исходя из удельного сопротивления 204 кПа.

Имитационная модель рыхления почвы.

Рассмотрим процесс взаимодействия рабочих органов экспериментального комбинированного агрегата с почвенной средой. Агрегат состоит из четырёх секций, оснащенных дисковыми и универсально-стрельчатыми рабочими органами с обоснованными конструктивными параметрами, рабочие органы на грядилях установлены по рациональной схеме [12].

Принцип работы. Комбинированный агрегат предназначен для полосной обработки почвы по технологии *Strip-till*. При движении агрегата центральный дисковый рыхлитель в один след разрезает сухую твердую почву и перерезает пожнивные остатки, два дисковых рыхлителя, расположенных симметрично по ширине обрабатываемой полосы, разрезают сухую твердую почву, перерезают пожнивные остатки, разбивают комья, отрезают пласт в вертикальной плоскости с целью получения ровной стенки борозды и ее чистого дна. После этого, универсальная стрельчатая лапа, рыхлит почву до требуемой глубины, разбивает комья, перерезает и перемешивает пожнивные остатки и выравнивает почву по ширине обрабатываемой полосы.

Обработка почвы производится при определенных условиях, соответствующих особенностям климата, в частности при определенной вязкости, твердости почвы, пористости грунта и т.д. Задаем следующие значения параметров: удельное сопротивление почвы различного механического состава, на которых должен работать агрегат - до 0.08 МПа (8 Н/см²); влажность почвы - до 16%; твердость почвы - до 5 МПа; гребнистость поверхности поля до 5 см; уклон поля не более 8°.

Для моделирования процесса рыхления почвы агрегатом с учетом физико-механических свойств почвы воспользуемся методом конечных элементов в пакете комплексных программ *COMSOL Multiphysics*. Для этого рассматриваемый агрегат и почва разбиваются на конечные элементы (Рис. 1.). Из Рис.1. следует, что конструкция под внешним воздействием от почвы и от силы тяги трактора работает как единый механизм.

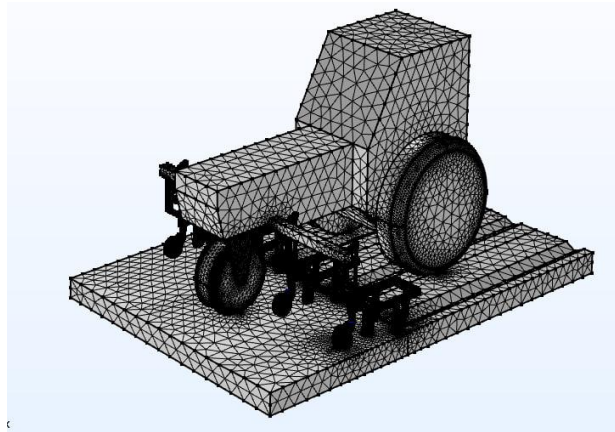


Рис. 1. Расчетная сетка взаимодействия рабочих органов комбинированного агрегата с почвой

Исследования показали, что продольные напряжения σ_{xx} (Рис.2), возникающие в грядилях агрегата, находятся в пределах 30 кПа, т.е., в пределах допустимого и не вносят

дополнительных нагрузок на силу тяги для движения трактора. При этом возникает существенная продольная деформация рамы конструкции.

Из полученных результатов (Рис.3.) следует, что возникающие вертикальные напряжения σ_{zz} меняются в пределах $-20 \text{ кПа} \leq \sigma_{zz} \leq 20 \text{ кПа}$ на передних и задних стенках стоек рыхлительных лап, и также находятся в пределах допустимого напряжения. Эти напряжения удовлетворяют предельным значениям напряжений, которые обычно возникают при обработке почвы рыхлителями. Для удобства дальнейших комплексных исследований внутренних напряжений, возникающих как в агрегате в целом, так и в обрабатываемой почве, введем в рассмотрение безразмерные значения компонент тензора напряжений, отнесенных к касательному напряжению 50 кПа , при котором среда почвы устойчива к сдвиговой деформации.

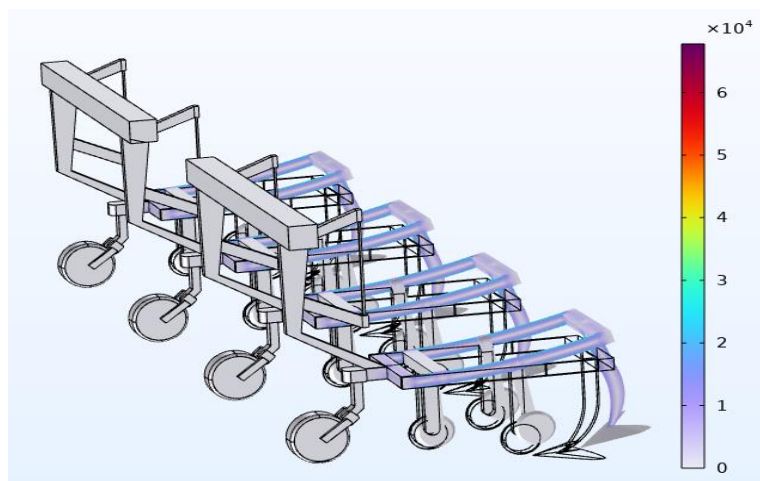


Рис. 2. Распределение продольных напряжений σ_{xx} на грядилях по направлению оси Ox .

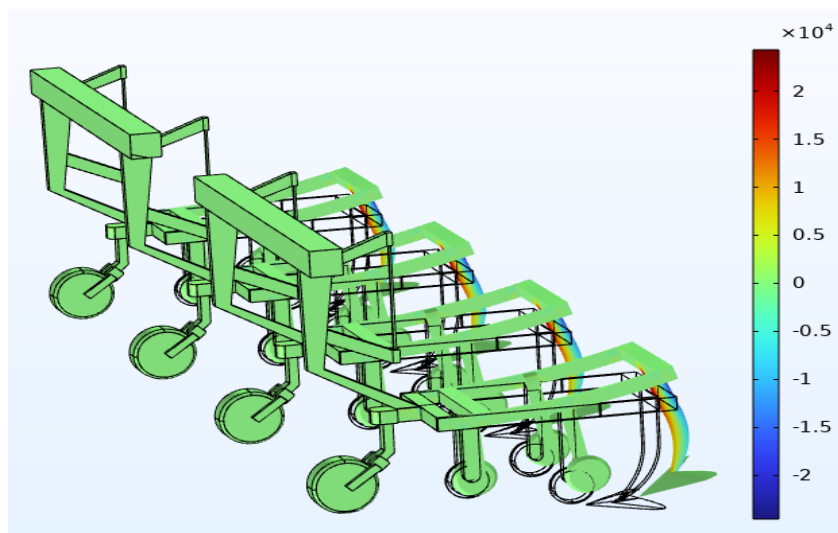


Рис. 3. Распределение вертикальных напряжений σ_{zz} на стойках рыхлительных лап по направлению оси Oz .

Из полученных результатов (Рис.4) следует, что на грядилях и рабочих органах агрегата возникают напряжения сжатия в пределах изменения безразмерного продольного напряжения σ_{xx} : 0 и -0.2. В раме агрегата возникают напряжения растяжения от 0 до 0.8. На обрабатываемой почве вокруг воздействия также возникают продольные напряжения растяжения.

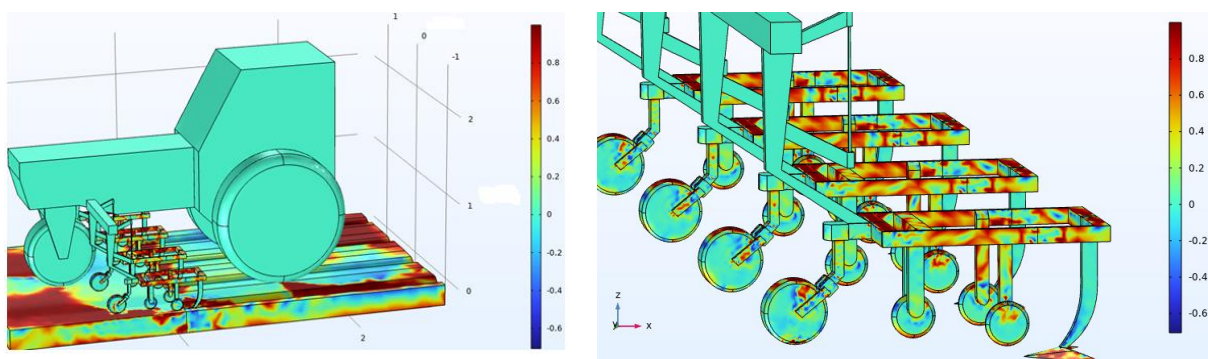


Рис.4. Распределение полей напряжений σ_{xx} на почве и рабочих органах агрегата

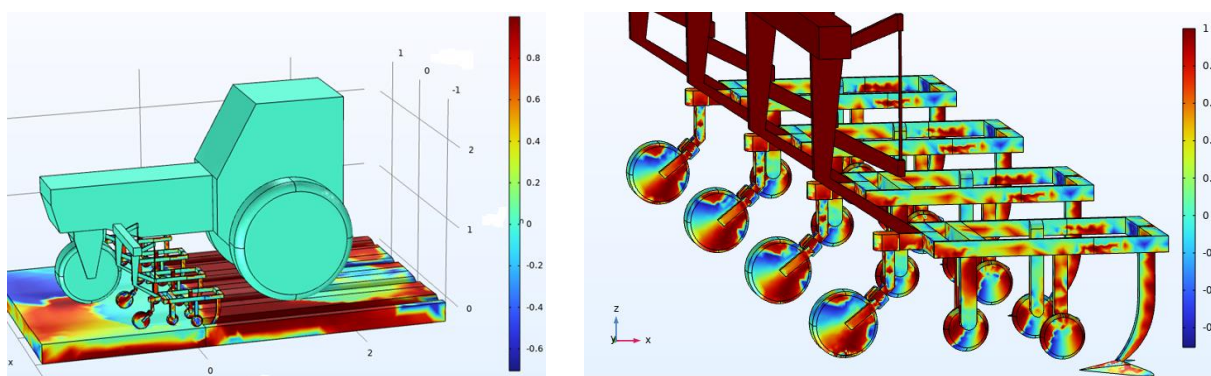


Рис.5. Распределение полей напряжений σ_{zz} на почве и рабочих органах агрегата

Из полученных результатов (Рис.5) следует, что на основной части агрегата возникают напряжения сжатия в пределах изменения безразмерного вертикального напряжения σ_{zz} : 0 и -0.2. В областях воздействия силы тяжести и усилия агрегата в почве также возникают зоны сжатия. В свободной от воздействия агрегата зоне наблюдаются зоны растяжения. В вертикальных и поперечных соединительных тягах рамы агрегата возникают напряжения растяжения от 0 до 1.

Заключение. Используя метод конечных элементов в программном комплексе *COMSOL Multiphysics*, разработана имитационная модель процесса рыхления почвы комбинированным агрегатом, проведен анализ напряженно-деформированного состояния агрегата и почвы при различных условиях эксплуатации. Системный подход к анализу процесса рыхления позволил установить энергетические, технологические, конструкционные факторы, оказывающие существенное влияние на эффективность и безопасность процесса. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- Разработанная модель адекватно описывает механическое взаимодействие рабочих органов агрегата с почвой, обеспечивая точное распределение напряжений и деформаций в зоне обработки.

- Анализ распределения продольных и вертикальных напряжений показал, что возникающие нагрузки соответствуют допустимым пределам, что подтверждает рациональность конструкции исследуемого агрегата.

- Полученные данные могут быть использованы при проектировании и совершенствовании сельскохозяйственных машин, способствуя повышению эффективности почвообрабатывающих процессов и снижению энергозатрат.

Таким образом, предложенная имитационная модель может служить надежным инструментом для дальнейших исследований динамических процессов обработки почвы, а также для разработки инновационных сельскохозяйственных агрегатов, адаптированных к различным почвенно-климатическим условиям.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Boymetov R.I.* Paxtachilikda tuproqqa ishlov berishni minimallashtirishga doir energiya-resurstejamkor kombinatsiyalashgan agregatlar bo'yicha ilmiy tadqiqotlarning asosiy natijalari / Qishloq xo'jaligi uchun yuqori unumli, resurstejamkor texnologiya va texnika vositalari bo'yicha ilmiy tadqiqotlarning natijalari. Gulbahor, 2009. b. 23-31.
- [2] *Свечников П. Г.* Модернизация почвообрабатывающих рабочих органов на основе исследования процесса их взаимодействия с почвой // Автореф. дисс. на соискание уч. степ. д.т.н. Челябинск. 2013. 44с.
- [3] *Платонов В.А., Чудновский А.Ф.* Моделирование агроклиматических условий и оптимизация агротехники. Л. Гидрометиздат, 2004, 28 с.
- [4] *Казаков Ю.Ф.* Анализ процесса рыхления почвы как системы // Вестник НГИЭИ. 2017, № 5 (72), стр. 26–33.
- [5] *Мударисов С.Г.* Повышение качества обработки почвы путем совершенствования рабочих органов машин на основе моделирования технологического процесса: Дисс. на соискание уч. степ. д.т.н. Челябинск. 2007. 334 с.
- [6] *Рахимов И.Р.* Совершенствование рабочих органов машин для основной обработки почвы на основе моделирования процесса: Дисс. на соискание уч. степ. д.т.н. Челябинск. 2006. 196с.
- [7] *Listauskas J., Jankauskas V., Zunda A., Katinas E., Gargasas J.* Estimation and modelling the wear resistance of plough points and knife coulters by discrete element method // 2024, Vol. 556-557, pp. 205508.
- [8] *Afanasiev V.V., Brazhnichenko D.V., Gaiduk V.I., Kalitko S.A.* Information technologies as a driver for the development of the economy of organizations // Economics and Entrepreneurship. 2018, Vol. 10, No. 99, pp. 699-701.
- [9] *Аминов Р. И.* Обоснование параметров и разработка культиватора для полосовой обработки почвы и объемного внутрипочвенного внесения удобрений: Автореф. дисс. на соискание уч. степ. к.т.н. Уфа. 2020. 20с.
- [10] *Alimova F., Saidova M., Ali Bayat A., Primkulov B., Atadjanova M.* Substantiation of parameters and operating modes of the pneumatic sowing apparatus for cluster sowing of cotton seeds // Solid State Technology. 2020, Vol 63, No 6, pp. 11876-11886
- [11] *Богданов Е.Н.* О механических свойствах глинистых грунтов // Грунтоведение. 2012, № 1, стр. 62-70.
- [12] *Primkulov B.Sh., Alimova F.A., Saidova M.T., Allanazarov A.A., Khurramov R.J.* Investigation of operating environments for operating bodies with low tillage// IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2024, Vol. 1420, pp. 012027.
- [13] *Patidar P., Soni P., Jain A., Mahore V.* Modelling soil-rotor blade interaction of vertical axis rotary tiller using discrete element method (DEM) // J. Terramechanics. 2024, Vol. 112, P. 59–68.

Дата поступления

19.04.2025

Alimova F.A., Boykov V.P., Jdanovich Ch.Y. Yumshatish texnologik jarayonini modellash asosida agregat va tuproqning kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish.

Annotatsiya. Maqolada tuproqni yumshatishning texnologik jarayonini simulyatsiya modellashtirish bo'yicha ma'lumotlar mavjud bo'lib, bu har xil turdagi tuproqqa ishlov beruvchi agregatlarning samaradorligini baholashning aniqligini oshirish, jarayonning energiya intensivligini tahlil qilish va optimal yumshatish rejimlarini tanlashga yordam beradi. Tadqiqotning maqsadi - kombinatsiyalangan agregatning ishchi organlarida kuchlanishlar, deformatsiyalar va tuproq qarshiliklarining taqsimlanishini aniqlash. COMSOL Multiphysics dasturiy majmuasidan foydalanib, tuproqning agregat bilan o'zaro ta'siri jarayonida simulyatsiya modeli tuzilgan. Agregat va tuproqning yumshatish paytidagi kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish natijalariga ko'ra, traktorning asosiy qismida o'lchovsiz vertikal kuchlanishning o'zgarishi chegarasida siqish kuchlanishlari 0 va -0,2 gacha, agregatning ramasida tortishish kuchlanishlari 0 dan 0,8 gacha, agregatning gryadellarida esa kuchlanishlar 0 dan 1 gacha bo'ladi.

Kalit so'zlar: simulyatsiya modeli, tuproqni yumshatish, kuchlanish, deformatsiya, agregat, diskret elementlar usuli.

Alimova F. A., Boykov V. P., Zhdanovich Ch. Y. Study of the stress-strain state of tillagers and soil based on modeling the technological process of loosening.

Abstract. The article presents data on the simulation modeling of the technological process of soil loosening, which improves the accuracy of assessing the efficiency of different types of tillagers, analyzes the energy consumption of the process, and aids in selecting the optimal modes of loosening. The study aims to determine the distribution of stresses, strains, and soil resistance on the working components of the combined tillager. Utilizing the COMSOL Multiphysics software package, a simulation model of soil was developed to analyze its interaction with the tillager. The results of the study on the stress-strain state of the tillager and soil during loosening indicate that compression stresses occur on the main part of the tractor within the range of dimensionless vertical stress from 0 to -0.2, tensile stresses from 0 to 0.8 are observed on the frame of the tillager, and tensile stresses from 0 to 1 arise on the plow beams of the tillager.

Keywords: simulation model, soil loosening, strain, stress, tillager, discrete element method.

ПАРАМЕТРЫ ТРУБ В ПНЕВОТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ ХЛОПКОУБОРОЧНЫХ МАШИН

Ганжаев Ш. А.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева, Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E mail: shohruhganjayev399@gmail.com

Аннотация. Процесс транспортировки хлопка из аппаратов современных хлопкоуборочных машин в бункер через относительно простую пневмотранспортную систему и обоснование конструкции и параметров трубопроводов пневмотранспортной системы имеют важное практическое значение. Статья посвящена процессу всасывания воздуха (рабочего объекта) через гофрированную трубу с помощью центробежного вентилятора, работающего при низком давлении. Благодаря малому аэродинамическому сопротивлению такие трубы в конструкции машины обладают свойством гибкости. В трубе диаметром 180 мм и длиной 1500 мм, ось симметрии которой изменена относительно вертикали с 0° на 90° , в программном обеспечении ANSYS выполнены аэродинамические расчеты значений скорости, давления и мощности, необходимых для обеспечения расхода воздуха. Эксперименты проводились на стенде, оборудованном центробежным вентилятором и гофрированной трубой. При сравнении результатов всех трех методов было отмечено, что максимальная разница между ними не превышала 14,7%.

Ключевые слова: хлопкоуборочная машина, пневмотранспортная система, гофрированная труба, потеря давления, моделирование ANSYS, угол наклона.

Введение. Пневмотранспортная система на хлопкоуборочных машинах играет важную роль в эффективном и качественном сборе хлопка. Конструкция и параметры трансмиссионных трубопроводов системы определяют стабильность воздушного потока и энергопотребление. Известно, что пневмотранспортная система на хлопкоуборочных машинах выполняет функцию передачи собранного в аппаратах урожая хлопка в бункер. По результатам полевых испытаний было отмечено, что конструкция пневмотранспортной системы 2-х рядных хлопкоуборочных машин МХ-1,8 и 4-х рядных МХ-2,4 с полунавесными вертикальными шпиделями производства АО «Ташкентский завод сельскохозяйственной техники» не может полностью обеспечить полноту сбора урожая при значениях, указанных в соответствии с агротехническими требованиями [1]. На этом этапе стоит отметить, что с учетом того, что урожай хлопка при междурядье 60 см собирается только хлопкоуборочными машинами с вертикальным шпинделем, повышение технических характеристик этой машины приобретает актуальное значение. Одной из причин неполного выполнения агротехнических требований является высокое аэродинамическое сопротивление в системе при разной длине и сложной геометрической форме трансмиссионных труб пневмотранспортной системы. Поэтому полунавесные хлопкоуборочные машины, разработка рациональной конструкции пневмотранспортной системы, а также научное обоснование ее параметров являются актуальными вопросами [1,2].

В нашей стране и в мире ведутся необходимые конструкторские и научно-исследовательские работы по системе пневмовоздушного транспорта. Примеры включают АО БМКБ «Агромаш», Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева и научно-исследовательский Институт механизации сельского хозяйства. Научные исследования по пневмотранспортным системам проводятся в США, Турции, Китае и странах СНГ [1-7].

В хлопкоуборочных машинах система подачи хлопка в бункер (пневмотранспорт) осуществляется за счет процессов всасывания, прогона и выброса воздуха с помощью вентилятора. Вышеуказанные процессы имеют свои преимущества и недостатки. В машине МХ-2,4, представленной на рисунке 1 (а), пневмотранспортная система отличается в основном меньшим энергопотреблением. При этом требуется в 1,5-2 раза меньше мощности, чем при пневматическом транспорте приводного типа со сжатым воздухом, и в 2-3 раза меньше мощности, чем при эжекционном (с) типе [1, 3]. Но в этом процессе повреждение семян на 3-4% выше, чем у вышеперечисленных, а загрязнение хлопка в 1,5 раза выше. Особенно

сложна конструкция труб, передающих собранный хлопок-сырец из приемной камеры аппарата в вентилятор; при их изготовлении используется технологическое оборудование. Привод системы эжекционного типа отличается от пневмотранспортной системы тем, что поток выталкиваемого воздуха не транспортируется от приемной камеры аппарата. Он транспортирует только собранный хлопок по трубам в бункер, и для этого требуется большая мощность. Система выброса использовалась во всех моделях хлопкоуборочных машин John Deere и Case, производимых в то время [1, 4].

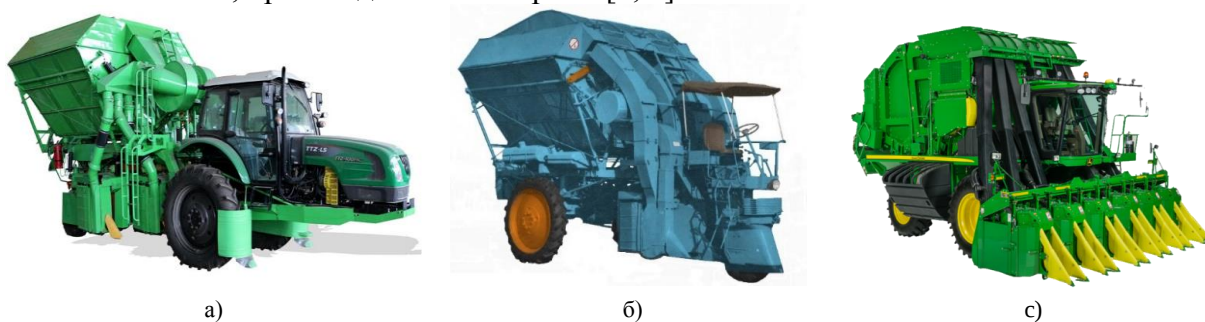


Рис. 1. Хлопкоуборочные машины, оснащенные пневмотранспортной системой различной конструкции: а) полуприцепной хлопкоуборочный комбайн МХ-2,4, оснащенный пневмотранспортной системой всасывающего типа; б) хлопкоуборочная машина ХВН-1,2 а, оснащенная пневмотранспортной системой нагнетательного типа со сжатым воздухом; в) комбайн John Deere СР690 с пневмотранспортной системой нагнетательного типа

Роль приемной камеры аппарата в уменьшении загрязнения собранного хлопка особая. В этом направлении А. Йўлдашев и Д. Кулдошев создали новые конструкции аппарата и показали его эффективность в экспериментах [2, 6]. Также ведутся научные исследования по уменьшению повреждений, вызванных ударами, путем изготовления лопасти вентилятора из композитного материала и поворота впускного отверстия вентилятора под определенным углом [1, 2, 4-6]. При этом актуальным остается проведение научных исследований на трубопроводах передатчиков хлопкоуборочных машин МХ-1,8 и МХ-2,4 полуподвешенного типа.

Факт повреждения семян при изгибах металлической трубы был изучен в опытах Д. М. Шполянского и других [7]. Он обнаружил, что общее повреждение труб составляет 0,1-0,2%. Эти трубы не только наносят дополнительный ущерб семенам, но и создают трудности при монтаже в системе из-за их чрезмерной массы и материала, который тверже семян. В статье рекомендуется устанавливать гофрированные трубы, изготовленные из полиэтилена, снижающие повреждение семян хлопка, которые по сравнению с жестяными трубами почти в 8 раз легче по массе и относительно просты в установке из-за их гибкости [1-3].

Постановка задачи. На основании анализа литературы и результатов исследований [1-6] на станки МХ-1.8 ГВ и МХ-2.4 были установлены гофрированные трубы $\varnothing 180$ мм (см. рис.2), машины прошли государственные испытания. Использование этой трубы в пневмотранспортной системе хлопкоуборочной машины требует исследования аэродинамических процессов в ней: изменение давления и скорости воздуха.

Диаметр и форма трубы являются основными параметрами при обеспечении заданного расхода воздуха. Таким образом, целью нашего исследования было определение параметров конвейера с помощью моделирования, аналитических расчетов и экспериментальных тестов в программном обеспечении ANSYS.

Исследование воздушного потока и потери давления [8, 9] показали важность диаметра трубы, материала и углов изгиба. Информация о свойствах потока в гофрированных

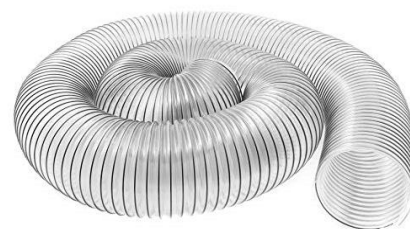


Рис. 2. Гофрированная труба

трубах представлена в работе [10]. Однако исследования по анализу этих параметров в условиях, характерных для хлопкоуборочных машин, недостаточны.

Материалы и методы. В статье использовались 3 различных метода исследования.

1. Аналитический анализ. Приведены аналитические формулы, используемые для расчета потерь давления (например, закон Гагена-Пуазея и формулы для местных сопротивлений). Кратко объясняется процесс теоретического расчета для каждого угла наклона.

2. Компьютерное моделирование (Ansys). В программе Ansys описывается геометрия создаваемой модели (размеры гофрированной трубы, радиус и углы изгиба), параметры вычислительной сети (количество элементов и типов) и применяемые граничные условия (расход воздуха, давление на входе и выходе).

3. Эксперименты проводились в лабораторных условиях [2] для центробежного вентилятора низкого давления, путем изменения частоты тока, подаваемого на двигатель по гофрированной трубе, параметры которой были отмечены выше.

Результаты. Потери давления при движении воздушного потока по трубам вызваны двумя основными факторами. Первый - это трение по длине (основная потеря давления). Это происходит в результате взаимодействия жидкости (в нашем случае воздуха) со стенками трубы. Для ламинарного потока эта потеря определяется законом Гагена-Пуазея [12-14]. Однако в турбулентном потоке учитываются такие факторы, как число Рейнольдса и турбулентность трубы [12-14]. Второй фактор - местное сопротивление в трубе. Оно возникает в результате резких изменений пути течения (изгибы, повороты, расширения, сужения и т. д.). Каждый элемент местного сопротивления вызывает определенную потерю давления [13-14].

Чтобы определить, какой характер имеет поток газа или жидкости внутри трубы, вычисляется число Рейнольдса. Оно показывает, находится ли поток в ламинарном (упорядоченном), переходном или турбулентном (неравномерном, вихревом) состоянии. Это важно при расчете потерь давления, расхода энергии и стабильности потока [15]. По этой причине, прежде чем использовать закон потока, необходимо определить, является ли поток ламинарным или турбулентным, с помощью числа Рейнольдса. Число Рейнольдса определяется по формуле [14]:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu}, \quad (1)$$

где: ρ - плотность жидкости или газа (кг/м^3); v - скорость потока (м/с); D - внутренний диаметр трубы (м); μ - динамическая вязкость ($\text{Па} \cdot \text{с}$).

Типы течений по числу Рейнольдса: $Re < 2300$ - ламинарный, $2300 < Re < 4000$ - переходная зона (переходный поток) и $Re > 4000$ - турбулентный [16]. На трубопроводах передачи, применяемых в системе воздушного пневмотранспорта хлопкоуборочных машин МХ-1.8 и МХ-2,4 [1, 7, 11], установлены гофрированные трубы диаметром 180 мм. Скорость хлопковоздушной смеси на входе в эти трубопроводы составляет 18 м/с, что было определено на основе экспериментов в ходе полевых испытаний в практическом проекте AL-210202547 [3]. Значение $\text{Па} \cdot \text{с}$ 18.2×10 было выбрано для динамической вязкости (μ) на основе литературных источников [15, 17, 18]. По этой причине при вычислении числа Рейнольдса мы выбираем следующие значения: $\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3$, $v = 18 \text{ м/с}$, $D = 0.18 \text{ м}$, $\mu = 18.2 \times 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $Re = 213626$.

Итак, в нашем случае $Re = 213626$, т.е., поток оказывается турбулентным.

В турбулентном потоке формула Дарси-Вейсбаха используется для определения потерь давления [15-17]:

$$\Delta P = f_D \frac{L \cdot \rho \cdot v^2}{2D}, \quad (2)$$

где: ΔP - потеря давления (Па); f_D - коэффициент трения Дарси-Вейсбаха, зависящий от деформации стенки трубы и числа Рейнольдса; ρ - плотность жидкости или газа (кг/м^3); L - длина трубы (м); V - скорость воздуха (м/с) и D - внутренний диаметр трубы (м).

Исходя из приведенной выше формулы для нашего случая, мы рассчитываем общую потерю давления и расход энергии в результате этой потери. Условно возьмем длину передающей трубы 1,5 м. f_D - коэффициент трения Дарси-Вейсбаха, в то время как [19] мы выбираем на основе литературы. $\Delta P = 32.02$ Па выбираем из литературных источников [19].

Со дна гофрированной трубы, расположенной вертикально, диаметром 180 мм, воздух поступает со скоростью 18 м/с. Длина трубы 1,5 м. Из приведенных выше расчетов следует, что потеря давления в данном случае составляет 32.02 Па. Посчитаем, сколько энергии расходуется в результате этой потери давления. Мощность (энергопотребление) определяется по формуле [15]:

$$A = \Delta P \cdot Q, \quad (3)$$

где: A – мощность, обеспечивающая движение воздуха в трубах (Вт); ΔP – потеря давления (Па) и Q – объемный расход ($\text{м}^3/\text{с}$)

При расчете объемного расхода используем формулу [10]:

$$Q = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot v. \quad (4)$$

На основании данных рассчитаем объемный расход: $Q = 0.4581 \text{ м}^3/\text{с}$.

Рассчитаем потребляемую мощность по формуле (3): $A = 14.67$ Вт.

Следовательно, когда воздух движется по вертикально расположенной трубе со скоростью 18 м/с и имеет потерю давления 32.02 Па, для поддержания этого потока требуется потребляемая мощность около 14.67 Вт.

Однако в хлопоуборочных машинах, а также во многих практических случаях в промышленности передаточные трубы не всегда располагаются в правильном вертикальном положении (рис. 1). Они могут иметь изгибы под разными углами. По этой причине в этой статье труба имеет угол Θ относительно вертикальных положений (0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° и 90°), которые были проанализированы для случаев наклона ниже. Теперь рассмотрим расчет потери давления в гофрированных трубах, изогнутых относительно вертикали. Изогнутые трубы (угловые секции) оказывают дополнительное влияние на потерю давления. Поэтому мы рассчитываем это в двух частях: потеря в прямой части и дополнительная потеря из-за изгиба.

Рассчитываем потери давления на прямом участке трубы по формуле (2): $\Delta P_{\text{вертикал}} = 16.03$ Па. Потребляемая мощность на этом участке трубы рассчитывается по формуле (3): $A_{\text{вертикал}} = 7.34$ Вт

Потери давления из-за изгиба рассчитываются по формуле [19]:

$$\Delta P_{\text{изгиб}} = K \frac{\rho \cdot v^2}{2}, \quad (5)$$

где K - коэффициент потери давления, который зависит от угла изгиба, формы трубы (гофры) и радиуса изгиба. Для гофрированных труб значение K обычно выше, чем для гладких труб, потому что поверхность гофры создает дополнительную турбулентность и значение K может быть получено из литературы [19].

Поскольку трубы наклонены относительно вертикали, также наблюдается дополнительная антигравитационная потеря [10]. Антигравитационная потеря – это потеря давления, вызванная силой тяжести от движения потока в вертикальном направлении (снизу-вверх). Если труба наклонена относительно вертикали, учитывается только вертикальная составляющая (разница в высоте). Эта потеря отражает использование части энергии потока для противодействия гравитации. На эту потерю влияют плотность жидкости или газа,

ускорение свободного падения и перепад высот. Формула антигравитационных потерь выглядит следующим образом:

$$\Delta P_g = \rho \cdot g \cdot h, \quad (6)$$

где: ρ – плотность жидкости или газа (кг/м^3); g – ускорение свободного падения ($g=9.81 \text{ м/с}^2$); h – разница высот по вертикали (м).

Если труба находится под углом θ относительно вертикали, высота для изогнутого участка рассчитывается как [6]:

$$h = L \cdot \sin \theta, \quad (7)$$

где L - длина изогнутого участка трубы (0.75 м). С помощью расчетных формул (5), (6) и (7) были рассчитаны потери давления при изгибе трубы относительно вертикальной оси, а результаты суммировались с потерями давления на вертикально крутом участке трубы, рассчитанными по формуле (2). Полученные значения суммарных потерь давления (ΔP) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчеты влияния угла наклона на потерю давления

Угол наклона, °	0	15	30	45	60	75	90
Потеря давления, Па	18.03	50.47	78.76	119.47	153.35	186.50	219.53

Из таблицы видно, что изменение оси трубы относительно вертикали от 0° до 90° приводит к увеличению давления воздуха в ней с 18.03 Па до 219.53 Па.

На основе результатов потери давления рассчитывалось общее энергопотребление, вызванное утечкой воздуха из трубопроводов, наклоненных под углом, и результаты были записаны в табл. 2.

Таблица 2

Влияние угла наклона на энергопотребление

Угол наклона, °	0	15	30	45	60	75	90
Энергопотребление, Вт	7.34	23.11	36.07	57.72	70.24	85.43	100.43

Также как в приведенном выше случае мощность воздушного потока увеличивается с 7.34 Вт до 100.43 Вт.

Расчеты потери давления и энергопотребления на основе моделирования ANSYS. В приведенных выше теоретических расчетах с помощью программы ANSYS Fluent через гофру диаметром 180 мм и общей длиной 1500 мм пропускали воздух через дно трубы со скоростью 18 м/с и определяли потери давления. Также в программе Ansys получены значения при углах наклона 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° и 90° . Ниже описаны процессы моделирования, выполняемые для каждого угла.

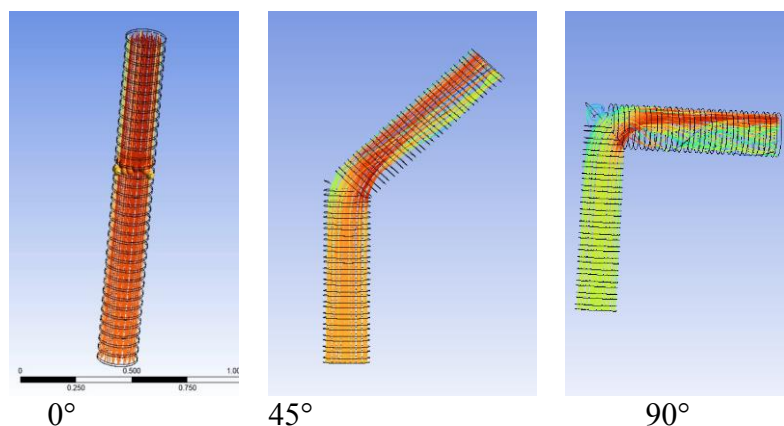


Рис. 3. Процесс моделирования в программе Ansys

Таблица 3

Влияние угла наклона на потерю давления и энергопотребление (в приложении ANSYS)

Угол наклона, °	0	15	30	45	60	75	90
Потеря давления, Па	20.05	57.40	83.06	115.37	170.03	230.53	250.50
Энергопотребление, Вт	7.95	26.29	38.05	52.85	77.89	105.61	114.75

Из этой таблицы видно, что в зависимости от угла наклона трубы увеличивается как давление, так и энергопотребление.

Желательно, размеры таблиц не должны превышать размер страницы, размеры графиков приведены в инструкции для статьи. Все обозначения на рисунках должны быть описаны в подрисуночной надписи. Вложенные фотографии должны быть авторскими или с указанием источника заимствования

Экспериментальное исследование. В лаборатории Института проводились опыты, основанные на вышеуказанных параметрах и условиях трубопровода. Гофрированная труба наклонялась к лабораторному стенду под углами от 0° до 90° по отношению к вертикали с разницей в 15° и через центробежный вентилятор пропусклся воздух из трубы снизу-вверх со скоростью 18 м/с. Потери давления в результате создаваемого потока измерялись с помощью манометра Капоматх anemomaster 6112 [21, 22]. Полученные результаты зафиксированы в табл. 4.



Рис. 4. Процесс гашения потери давления экспериментально

Таблица 4

Влияние угла наклона на потерю давления и энергопотребление (эксперимент)

Угол наклона, °	0	15	30	45	60	75	90
Потеря давления, Па	20.05	57.40	83.06	115.37	170.03	230.53	250.50
Энергопотребление, Вт	7.95	26.29	38.05	52.85	77.89	105.61	114.75

Видно, что данные в таблице идут в одном направлении с вышеуказанными расчетными операциями.

Результаты проведенного исследования были обобщены с помощью гистограмм на рис. 5.

В рамках исследования влияние угла наклона на потерю давления и энергопотребление изучалось с помощью методов экспериментального, аналитического и компьютерного моделирования (Ansys Fluent). Результаты анализа потери давления показали, что наибольшее несоответствие между теоретическими расчетами и компьютерным моделированием составило 11,98% при угле наклона 0°. Наибольшая разница между теоретическими расчетами и экспериментальными результатами показала 14.70% при угле наклона 90°. Однако самая большая разница между компьютерным моделированием и эксперименталь-

ными результатами составила 5.42% при угле наклона 45°. Наименьшие различия были отмечены как -3.30% (теоретико - симуляционный, 45°), 1.88% (теоретико - экспериментальный, 45°) и 0.41% (симуляционно - экспериментальный, 75°) соответственно.

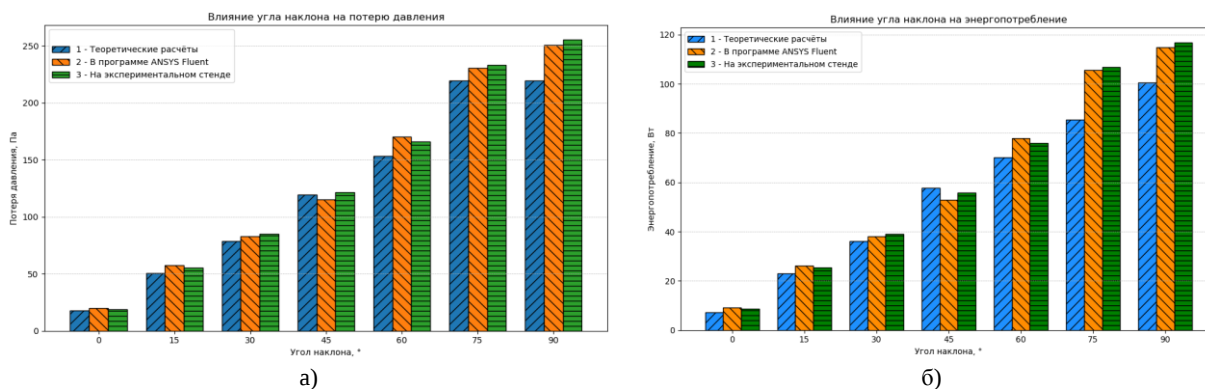


Рис. 5. Сравнение результатов анализов: а) результаты зависимости потерь давления от угла наклона; б) результаты зависимости энергопотребления от угла наклона

Результаты анализа энергопотребления показали, что наибольшая разница между теоретическими расчетами и компьютерным моделированием составила 13.76% при угле наклона 15°. Наибольшая разница между теоретическими расчетами и экспериментальными результатами показала 13.86% при угле наклона 90°. Однако самая большая разница между компьютерным моделированием и экспериментальными результатами составила 9.02% при угле наклона 45°. Наименьшие различия были определены с точки зрения энергопотребления как -8.71% (теоретическое моделирование, 45°), -0.07% (теоретическое моделирование, 45°) и -0.33% (моделирование - эксперимент, 90°).

Заключение

Проведенные сравнительные исследования показали:

1. Потери давления и энергопотребления в гибком гофрированном трубопроводе пневмотранспортной системы хлопкоуборочной машины по результатам известных методов расчета аэродинамики, программы Ansys Fluent и экспериментов на стенде показали что разница между их значениями удовлетворяет требования стандарта ISO 5725-5:1998.

2. Использование гофрированной трубы в пневмотранспортной системе хлопкоуборочной машины для сбора хлопка при изгибе её от вертикального положения до 90° привело к увеличению давления до 255,2 Па и возрастанию потребляемой мощности до 116,89 Вт.

3. Программное обеспечение Ansys Fluent позволяет с высокой точностью рассчитывать параметры пневмотранспортной системы хлопкоуборочной машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rizaev A.A. et al. On the quality of the harvested cotton and the energy efficiency of the air transport system of the cotton-picking machines // E3S Web Conf. / ed. Kovalev I. 2023, Vol. 390, P. 06044.
2. Иўлдашев А.Т. Научно-технические решения пневмотранспортной системы хлопкоуборочной машины со сменными уборочными аппаратами: Дисс. На соискание уч. степ. д.т.н. Ташкент. 2022. 177 с.
3. Кулдашев Д.А., Норматов М.К., Хунаров А.А. Разработка эффективной конструкции центробежного вентилятора хлопкоуборочных машин // Узбекистанский журнал "Проблемы механики". 2024, № 1, стр. 40-46.
4. Матчанов Р.Д. Хлопкоуборочные машины 1929 – 2010 годы. Ташкент. Fan va texnologiyalar, 2011, 352 с.
5. № FAP 2530. Патент на полезную модель. МИСМИ, авторы Ризаев А.А. и т.д. // Центробежный вентилятор для транспортировки хлопка на хлопкоуборочной машине. Бюл. №1, 2024.
6. Патент № IAP 06981 от 27.06.2022 г. Матчанов Р.Д., и др. Способ передачи хлопка из приемной камеры хлопкоуборочной машины в бункер и устройство для его реализации.
7. Rizaev A. et al. Effect parameters of vertically spindle cotton picker machines on the mechanical damage of cotton seeds during machine harvesting // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 20206 Vol. 883, No. 1, P. 012166.
8. White, F. M. Fluid Mechanics (8th Ed.). McGraw-Hill Education, 2016, 885 p.
9. Munson, B. R. Fundamentals of Fluid Mechanics. Wiley, 2013, 816 p.

10. Smith, J. Corrugated Pipe Flow Analysis // Journal of Fluid Engineering. 2018
11. <https://uzal.uz/product/mx-18-paxta-terish-mashinasi/>
12. Hagen, G. Ueber Die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren // Annalen der Physik und Chemie. 1839, Vol. 124, No. 11, pp 1-47.
13. Poiseuille, J. L. M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1840, Vol. 11, pp 961-967
14. Reynolds, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1883, Vol. 174, pp 935-982.
15. Idelchik, I. E. Handbook of Hydraulic Resistance (3rd ed.). CRC Press, 2003, 526 p.
16. Miller, D. S. Internal Flow Systems (2nd ed.). Gulf Publishing Company, 1990, 650 p.
17. Çengel, Y. A., & Cimbala, J. M. Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications. McGraw-Hill Education, 2011, 1031 p.
18. Fox, R. W., McDonald, A. T., & Pritchard, P. J. Introduction to Fluid Mechanics. John Wiley & Sons, 2008, 379 p.
19. Норматов М.К. Сравнительный анализ энергоемкости пневмотранспортных систем хлопкоуборочных машин. Журнал “Проблемы механики”. 2024, № 2, стр. 51-59.
20. Colebrook, C. F., & White, C. M. Experiments with fluid friction in roughened pipes // Proc. R. Soc. London. Ser. A - Math. Phys. Sci. 1937, Vol. 161, No. 906, pp. 367–381.
21. Crane Co. Flow of Fluids Through Valves, Fittings, and Pipe // Technical Paper. 1982, No. 410, 133 p.
22. <https://www.giangarloscientific.com/environmental/kanomax/6112.html>
23. ISO 5725-5:1998 – методы измерения и точность результатов: альтернативные методы воспроизведения.

Дата поступления
11.04.2025

Ganjaev Sh. A. Paxta terish mashinalari pnevмотransport tizimidagi quvurlar parametrlari

Annotatsiya. Zamonaviy paxta terish mashinalari apparatlaridan paxtani bunkerga uzatish jarayoni konstruksiyasi nisbatan sodda pnevмотransport tizimi orqali bajarilishi va tizimdagi uzatuvchi quvurlarning konstruksiyasi va parametrlarini asoslash muhim amaliy ahamiyatga ega. Maqola past bosimda ishlaydigan markazdan qochma ventilyator yordamida havoni (ishchi obekt) gofrasimon quvur orqali so'rish jarayoniga bag'ishlangan. Aerodinamik qarshiligi kamligi tufayli bunday quvurlar mashina konstruksiyasiga moslashuvchanlik hususiyatiga ega. Diametri 180 mm va uzunligi 1500 mm bo'lgan quvurda, uning simmetriya o'qi vertikalga nisbatan 0° dan 90° gacha o'zgartirilgan holda, havo sarfini taminlash uchun zarur bo'lgan tezlik, bosim va quvvat qiymatlarini aerodinamik hisoblar va Ansys dasturida bajarildi. Markazdan qochma ventilyator va gofrasimon quvur bilab jihozlangan standda tajribalar olib borildi. Har uchala usul natijalari solishtirilganda, ularning orasidagi maksimal farq 14,7 % dan oshmagani qayd etildi.

Kalit so'zlar: paxta terish mashinasi, pnevмотransport tizimi, gofrasimon quvur, bosim yo'qotilishi, Ansys simulatsiyasi, egilish burchagi.

Ganjaev Sh. A. Parameters of pipe in the pneumatic transport system of cotton picking machines

Abstract. The process of transporting cotton from modern cotton picking machines to a hopper through a relatively simple pneumatic transport system and the substantiation of the design and parameters of the pneumatic transport system pipelines are of great practical importance. The article is devoted to the process of sucking air (working object) through a corrugated pipe using a centrifugal fan operating at low pressure. Due to low aerodynamic resistance, such pipes in the machine design have the property of flexibility. In a pipe with a diameter of 180 mm and a length of 1500 mm, the axis of symmetry of which is changed relative to the vertical from 0 ° to 90 °, aerodynamic calculations of the values of speed, pressure, and power required to ensure air flow are performed in the ANSYS software. The experiments were conducted on a stand equipped with a centrifugal fan and a corrugated pipe. When comparing the results of all three methods, it was noted that the maximum difference between them did not exceed 14.7%.

Keywords: cotton picker, pneumatic conveying system, corrugated pipe, pressure loss, ANSYS modeling, tilt angle.

СОДЕРЖАНИЕ

М.К.Усаров, Ф.А. Усанов, М.Ш. Курбанбаев. Поперечные колебания многоэтажного здания на основе континуальной пластинчатой пространственной модели.....	3
А.И.Салимова, Р.И.Паровик. Вынужденные колебания дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри.....	12
И.Мирзаев, Е.В.Ан. Устойчивость газопровода над оврагом при статических нагрузках и сейсмическом воздействии.....	18
М.У.Ходжабеков, З.С. Юлдошева. Колебания стержня с подвижным динамическим гасителем.....	24
Б.М.Мардонов, Н.А.Нишонов, М.Ж.Бердибаев, А.Ч. Хуррамов. Колебания жесткой балки (плиты), установленной на двух деформируемых опорах (сваях), с кусочно однородными коэффициентами постели грунта.....	34
А.А.Халджигитов, З.З.Хасанова, О.У.Тилолов. Задачи теории упругости в напряжениях.....	44
Ш.Ш.Хожиккулов, И.К.Хужаев, Б.Б. Бахтиёр. Применение метода Фурье для решения задачи транспортировки несжимаемых жидкостей по рельефному трубопроводу.....	52
К.Наврузов, З.К.Шукуров, З.Файзуллаева, Рашидова Л. Исследование нестационарного течения упруговязкой жидкости в плоском канале.....	67
Н.А.Носирова, М.Э.Мадалиев. Численное моделирование турбулентного течения в резко расширяющемся канале с использованием линейных моделей турбулентности в вычислительной среде с открытым исходным кодом.....	73
Ф.Х.Назаров, С.К.Абduxамидов, Д.П.Наврузов. Численное моделирование пограничного слоя на выпуклой поверхности с применением модели турбулентности Ментера.....	81
А.А.Ризаев, Н.Б.Джураева. Опережение шпиндельного барабана и скорость движения хлопкоуборочной машины.....	93
М.К.Худжаев, Ш.А.Иброхимов, Г.Ф.Пирназаров, Б.Б.Хасанов, Х.Дж.Джумаев. Силы трения двухгранных осесимметричных и одногранных клиновых пар.....	102
Д.М.Мухаммадиев, О.Х.Абзоиров, Н.К.Жумаев, Л.Ю.Жамолова. Изгиб пильных дисков волоконотделителя с учетом их затяжки.....	106
Ф.А.Алимова, В.П.Бойков, Ч.И.Жданович. Анализ напряженно-деформированного состояния агрегата и почвы на основе моделирования технологического процесса рыхления.....	111
Ш.А.Ганжаев. Параметры труб в пневмотранспортной системе хлопкоуборочных машин.....	117

MUNDARIJA

M.K.Usarov, F.A.Usanov, M.Sh. Kurbanbaev. Ko'ndalang tebranishlardagi ko'p qavatli binolarning fazoviy kontinual modellari asosida hisoblash.....	3
A.I.Salimova, R.I. Parovik. Van der Pol-Airy fraktsiyali osilatorining majburiy tebranishlari.....	12
I.Mirzaev, Ye.V.An. Statik yuklamalar va seysmik ta'sirdagi jarlikdan o'tkazilgan gaz quvurining ustuvorligi.....	18
M.U.Xodjabekov, Z.S.Yuldosheva. Sterjenning harakatlanuvchi dinamik so'ndirgich bilan birgalikdagi tebranishlari dinamikasi.....	24
B.M.Mardonov, N.A.Nishonov, M.J.Berdibaev, A.Ch.Xurramov. Gruntning bo'lakli bir jinsli o'zaro ta'sir koeffitsientli, ikkita deformatsiyalanuvchan tayanchlarga (qoziq) o'rnatilgan bikir balka (plita)ning tebranishi.....	34
A.A.Xaldjigitov, Z.Z.Xasanova, O.O.Tilovov. Elastiklik nazariyasining kuchlanishlarga nisbatan masalalari.....	44
Sh.Sh.Xojikulov, I.K.Xujayev, B.B.Baxtiyorov. Relyefli quvur orqali siqilmaydigan suyuqlikni uzatish masalasini yechish uchun Furiye usulini qo'llash.....	52
K.Navruzov, Z.Shukurov, Z.Fayzullaeva, L.Rashidova. Yassi kanalda elastik qovushoq suyuqlikning nostatsionar oqimini tadqiq qilish.....	67
N.A.Nosirova, M.E. Madaliyev. Keskin kengayuvchi kanaldagi turbulent oqimni chiziqli turbulentlik modellari asosida ochiq dasturiy platformada sonli modellash.....	73
F.X.Nazarov, S.K.Abduxamidov, D.P. Navruzov. 2D qavariq egrilik chegara qatlamini tekshirish muammosi uchun SST turbulentlik modelini o'rganish.....	81
A.A. Rizaev, N.B. Juraeva. Shpindelli barabanning o'zishi va paxta terish mashinasining harakat tezligi.....	93
M.K.Xudjaev, Sh.A.Ibroximov, G.F.Pirnazarov, B.B.Xasanov, X.Dj. Djumaev. Ikki qirrali o'qqa nisbatan simmetrik va bir qirrali ponalarining ishqalanish kuchlari.....	102
D.M.Muhammadiev, O.X.Abzoirov, N.K.Jumaev, L.Yu. Jamolova. Tola ajratgich arrali diskini siqilish kuchini hisobga olgan holda egilishi.....	106
F.A.Alimova, V.P.Boykov, Ch.Y. Jdanovich. Yumshatish texnologik jarayonini modellash asosida agregat va tuproqning kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish.....	111
Sh.A. Ganjaev Paxta terish mashinalari pnevmotransport tizimidagi quvurlar parametrlari.....	117

Требования к статье

1. Общие положения

К публикации в журнале «Проблемы механики» принимаются рукописи на английском, русском или узбекском (латиница) языке, содержащие оригинальные результаты в областях механики отмеченных ниже. Материалы не должны быть ранее опубликованы в иных изданиях. Объем научной статьи ограничен **20 страницами** (научные сообщения до 5 страниц) принятого в журнале формата, включая не более **8 рисунков и 5 таблиц**.

Редакционная коллегия может заказать обзорные статьи с отличными от вышеупомянутых требований к объёму представляемых материалов.

Название статьи должно отражать суть приведенных материалов и соответствовать содержанию представленного материала и являться как можно более конкретным. Основное требование к названию статьи — краткость и ясность. Также название статьи должно чётко отражать тему, позицию автора и не должно вызывать у читателя ложных допущений о содержании статьи. Название статьи должно содержать не более 10 слов и состоять не более чем из 2 предложений (обоснованные исключения допускаются). Следует избегать в названии статьи слов «исследования», «анализ» и строго придерживаться научного стиля речи. Сокращения в названии статьи можно использовать только общепринятые в данной области исследований (например, НДС – напряженно деформированное состояние, МКЭ – метод конечных элементов и т.д.).

Статьи должны быть изложены четким и понятным языком, не допускающим двусмысленного толкования.

Редакция принимает от авторов статьи в электронном виде через **электронную систему** подачи статей при условии, что они оформлены по правилам. Авторы могут прислать статью и документы к ней на электронную почту instmechofficial@gmail.com

Пакет материалов должен содержать следующие файлы:

- Файлы с текстом **статьи**, оформленной согласно настоящим Правилам:
 - в формате **Microsoft Word**;
 - **pdf**-версия.
- Файлы с **иллюстрациями** (разрешены только форматы **TIFF, PNG, BMP, JPEG, WMF**). Форматы могут быть любыми, постоянной для печати должна быть одна величина — разрешение не менее 200 ppi. Цветные иллюстрации и графики с чётким разрешением (100 lpi). Размер рисунков должен быть не более 15x15см.

- Файл с **данными о каждом авторе**: фамилия, имя, отчество (на английском, русском и узбекском (латиница) языках), место работы, контактные телефоны, электронные адреса (e-mail). Если в статье несколько авторов, надо указать, с кем из соавторов следует вести переписку.

- Файл с авторским переводом на **английский язык** заголовка статьи, списка ключевых слов и основных терминов, встречающихся в статье.

- **Акт экспертизы**, подтверждающий возможность публикации рукописи в открытой печати, **от организации, где выполнена работа**.

- **После принятия статьи к публикации заключается «Договор» о передаче авторского права.**

В случае возникновения у редакционной коллегии вопросов по предоставленному варианту рукописи, редколлегия вправе запросить у авторов её печатный вариант.

Присланные статьи должны быть оформлены в соответствии с настоящими **Правилами**.

Статьи, оформленные с нарушением настоящих правил редакцией не принимаются.

Редакция вправе не вступать в переписку с автором относительно причин (оснований) отказа в публикации статьи.

Все материалы, поступившие для публикации, проходят анонимное рецензирование. При подаче через электронную систему Издателя автор получает письма о состоянии статьи от системы.

Рукопись, направленная авторам на доработку, должна быть загружена в электронную систему Издателя в исправленном виде в течение одного **месяца**.

После принятия к публикации статья редактируется научным редактором и может быть выслана авторам для окончательного оформления и подготовки рукописи к печати. Исправления научного редактора в течение **месяца** должны быть внесены в рукопись.

2. Структура статьи

К рассмотрению принимаются статьи со структурой, соответствующей международному стандарту IMRAD (introduction, methodology, results, analysis, discussion):

Аннотация. В аннотации определяется краткая характеристика научной статьи с точки зрения ее назначения, содержания, вида, формы и других особенностей. Объем ее должен быть не более 100 слов. Аннотация должна дать возможность читателю установить основное содержание научной статьи, определить ее релевантность и решить, представляет ли она научный интерес для данного читателя. Исходя из этого, аннотация должна отражать цель исследования, основное содержание и новизну статьи в сравнении с другими, родственными по тематике и целевому назначению, а также полученные результаты. Размер шрифта 10pt, курсив.

Ключевые слова. Ключевые слова должны являться текстовыми метками, по которым можно найти статью при поиске и определить предметную область статьи. Они должны содержать от 3 до 7 слов или словосочетаний разделенные запятой. Размер шрифта 10pt, курсив.

Аннотация и ключевые слова должны быть представлены на английском, русском и узбекском языках.

Введение. Раздел, который начинается с описания объекта исследования, затем формулируется актуальность исследования. Приводится обзор литературы, подтверждающий отсутствие в литературных источниках решения данной задачи и указывающий предшественников, на исследования которых базируется работа. Далее формулируется цель исследования, почему проведено исследование, какие гипотезы проверены? В данном разделе следует излагать предмет статьи языком, понятным для широкого круга специалистов.

Методы. В данном разделе подробно описывается выбранный метод исследования – экспериментальный, теоретический, численный или иное. При этом метод должен быть расписан таким образом, чтобы другой исследователь был способен его воспроизвести.

Результаты. Результаты рекомендуется представлять преимущественно в виде таблиц, графиков и других иллюстраций.

Анализ. Этот раздел включает анализ полученных результатов, их интерпретацию, сравнение с результатами других авторов с ссылками на их публикации.

Обсуждение. Этот раздел подразумевает ответ и почему это имеет значение? Как это вписывается в то, что нашли другие исследователи? Каковы перспективы для исследований?

Заключение. В этом разделе кратко подводятся итоги научного исследования. Заключение содержит нумерованные выводы, кратко формулирующие основные научные результаты статьи как установленные авторами зависимости (связи) между параметрами объекта исследования. Выводы должны логически соответствовать поставленным в начале статьи задачам.

В конце статьи может быть выражена **благодарность** за финансовую, информационную или иную поддержку, оказанную в ходе написания статьи.

Отдельно в электронную редакцию загружаются следующие компоненты статьи:

заглавие на английском, русском и узбекском языках (требования к названию статьи)

аннотация на английском, русском и узбекском языках (требования по составлению аннотации)

ключевые слова на английском, русском и узбекском языках (требования к ключевым словам)

список литературы на кириллице (для статей на русском языке) и на латинице (узбекский, рекомендации по составлению и оформлению списка литературы).

P.S. Структура стандарта IMRAD не предполагает обязательного использования (как указано в шаблоне) всех разделов указанных выше. Некоторые из них могут быть объединены, названия разделов могут быть иными, но в целом данный стандарт предполагает раскрытие всех указанных положений в материале научной статьи.

Рекомендации по формату статьи

В верхнем левом углу указывается код УДК статьи, размер 9pt.

При подготовке рукописи следует соблюдать единообразие терминов. Не стоит называть одно и то же разными именами. Следует соблюдать единообразие в обозначениях, системах единиц измерения, номенклатуре. Предпочтительно использовать систему СИ. Сокращения должны быть

расшифрованы в тексте при их первом упоминании. Следует придерживаться безличной формы изложения, избегать эмоциональных оценок и комментариев, воздерживаться от хвалебных и критических замечаний в адрес тех или иных работ и авторов.

Научные статьи принимаются в объёме, не превышающем 20 страниц (короткие сообщения до 5 страниц) формата А4 с полями сверху и слева: 2.5см, справа и снизу: 1.5см. Размер шрифта статьи: 12pt, расстояние между строк: 1.15 интервала. Статья должна быть набрана в редакторе Word, формулы набраны в редакторе Equation Editor. Количество рисунков как правило не должно превышать 8, количество таблиц не более 5. Отступ 10мм.

Номер и заголовок раздела набирается полужирным и идет с красной строки (отступ приведен в шаблоне). Далее, на следующей строке идет текст раздела, набранный обычным шрифтом (не полужирным). Подзаголовок набирается курсивом, имеет двойную нумерацию и набирается с красной строки. Текст подпункта набирается в одной строке с его заголовком.

При ссылках на пункты статьи следует пользоваться сокращениями п. 1, пп. 2-4 и т.п.

Подзаголовки набираются курсивом и идут с красной строки.

Рекомендации по набору текста

Не используйте более одного пробела – используйте абзацные отступы и табуляцию.

Десятичные цифры в тексте и на рисунках набираются только через точку, а не через запятую (0.25 вместо 0,25). Индексы подлежат расшифровке в тексте. Для обозначения индексов используются латинские или греческие буквы. Даты вида «число.месяц.год» оформляются следующим образом: 02.05.1991.

Правила к оформлению формул

Формулы набираются шрифтом размера 12pt для строчных формул и 8pt для верхних или нижних индексов. Размеры формул одинаковы по всему тексту. Готические и кириллические буквы в формулах и индексах не используются.

Нумерация формул производится сквозная: (1), (2), (3), (4), или по пунктам: (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) и т.д., где первое число обозначает номер пункта, а второе – порядковый номер в этом пункте. Следует нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте.

Если статья не разбивается на пункты, то применяется исключительно сквозная нумерация формул: (1), (2) и т.д.

В двухэтажных формулах дробь в числителе и знаменателе указывается горизонтальной чертой. В текстовых формулах дробь всегда указывать косой чертой.

Векторы и матрицы набираются полужирным прямым шрифтом (стрелка над вектором не используется).

Прямым шрифтом набираются цифры и функции, например, $\sin 2x$, $\cos \omega t$ и т.д., а также любые сокращения и термины, не являющиеся переменными.

Греческие буквы всегда прямые.

В индексах используются только латинские буквы (кириллица в индексах не допускается), переменные в индексах набираются курсивом, сокращения слов (min, max, eff, pl, elastic и цифры набираются прямым шрифтом).

Правила к оформлению рисунков

Рисунки (графики и фотографии) должны быть созданы в цифровом формате, допускаются вставки чётких фотографий. Каждый рисунок обозначается снизу Рис.1, Рис.2 и т.д. Каждый рисунок должен содержать подрисуючную подпись. Если рисунок состоит из нескольких подрисунков, то их обозначают латинскими буквами в круглых скобках, например, (a), (b) и т.д., которые размещают на удобном месте в подрисунке.

На рисунках должны использоваться латинский шрифт и математические термины греческими буквами, кириллический текст не должен использоваться на рисунках. Надписи, формулы, загромождающие рисунок, должны быть заменены цифровыми или буквенными обозначениями и вынесены в подрисуючную подпись или в текст статьи, на рисунках должна быть отмечена размерность (в системе СИ). Обозначения осей на графиках задаются буквами или формулой без поясняющих слов и помещаются, как правило, слева сверху для оси ординат, а для оси абсцисс справа

внизу от оси. Расположение обозначений осей всегда вертикальное. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках.

При необходимости, возможно выполнять графики с нанесением сетки (желательно квадратной) и указывать числовые значения делений. В случае, если сетка необходима, она не должна быть частой, в большинстве случаев достаточно трех числовых значений на каждой оси без указания размерности.

Ссылки в тексте на рисунки следует выполнять так: рис.1, рис.2 или рис.3,а, рис.3,б и т.д. Если рисунок один, то на него ссылаются словом «рисунок».

Правила к оформлению таблиц

В таблицах следует пользоваться краткими обозначениями, избегать текстового пояснения. Таблица должна быть размещена по возможности на одной странице без перехода ее на другую страницу. Необходимые разъяснения обозначений следует давать непосредственно в тексте статьи.

Ссылки на таблицы набираются табл.1, табл.2 и т.д. Если таблица одна, то на неё ссылаются словом «таблица».

Оформление списка литературы

Список литературы должен отражать современное состояние дел в исследуемой области, включать в том числе ссылки на публикации за последние 5-10 лет и не быть избыточным и искусственным.

В тексте статьи ссылки на литературные источники указываются строго в порядке цитирования в квадратных скобках: [1], [2, 3], [4–6].

Список литературы приводится в конце статьи в соответствии с ГОСТ 7.05-2008 "Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления". Ниже приведены примеры оформления списка литературы.

Размер шрифта 10pt

Монографии и учебные пособия.

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва. Наука, 1976, 544 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. Москва. Наука, 1979, 830 с.

Статьи в журналах.

3. Zubchaninov V.G. Problems of the mathematical theory of plasticity // Strength of Materials. 2000, Vol. 32, No. 1, pp.13-26;
4. Кадашев Ю.И., Помяткин С.П. Статистическая теория пластичности учитывающая влияние параметра Лоде // МТТ. 1990, №3, стр.91-95.

Статьи в сборниках и периодических изданиях.

5. Келлер И.Э., Кузнецова В.Г., Новокишанов Р.С. Сравнение двух моделей упругопластичности, обобщающих модель Мазинга на случай сложного нагружения / Сб. научн. трудов Математическое моделирование систем и процессов. Пермь, 1996. №4. стр.29-39.
6. Мясников В.П., Гузев М.А. Аффинно-метрическая структура упругопластической модели сплошной среды / Современные методы механики сплошных сред: Сборник статей к 90-летию со дня рождения академика Л. И. Седова. Москва. Наука, 1998. стр.30-37.

7. Trusov P.V., Keller I.E., Kluev A.V. Two plasticity models considering micromechanisms of observed phenomena / PROBAMAT-21st: Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop. Dordrecht, 1998. pp.531-538.

Тезисы докладов.

8. Абдусаттаров А., Москвитин В.В., Буриев Т. Исследование напряженно-деформированного упруго-пластических конструкций при переменных нагружениях с учетом обобщенного принципа Мазинга и повреждаемости / Тезисы докладов V конференция "ДОФПС": Ташкент, 1981. стр.167-168.

Электронные ресурсы.

9. Шокин Ю.И., Федотов А.М. Информационные технологии Internet // Вычислительные технологии. 1997. Т. 2. №3. URL: <http://www-sbras.nsc.ru/win/mathpub/comp-tech/t2n3/intranet.htm>.

Ссылки на диссертации и авторефераты.

10. *Васин Р.А.* Экспериментально–теоретическое исследование определяющих соотношений теории упругопластических процессов: Дисс. на соискание уч. степ. д.ф.–м.н. Москва. 1987. 386с.

11. *Степанов Л.П.* Временные эффекты при пластическом деформировании металлов: Дисс. на соискание уч. степ. к.ф.–м.н. Москва. 1985. 170с.

12. *Субботин С.Л.* Устойчивость сжатых пластин за пределом упругости при сложном нагружении в условиях ползучести: Дисс. на соискание уч. степ. д.т.н. Тверь. 2003. 219с.

13. *Окулова Н.Н.* Численное решение задач нестационарного течения вязкопластического материала. Автореф. дисс. на соискание уч. степ. к.ф.–м.н. Москва. 2008. 16с.

Статьи принимаются по следующим и смежным к ним тематикам:

- Механика деформируемого твёрдого тела;
- Механика жидкости и газа;
- Общая механика;
- Основания, фундаменты и механика грунтов;
- Строительная механика;
- Экспериментальная механика;
- Теория механизмов и машин;
- Прикладная механика;
- Инженерия и технологические процессы;
- Сейсмостойкость зданий и гидротехнических сооружений;
- Метрополитены, мосты и транспортные коммуникации;
- Сельскохозяйственные машины и оборудования.